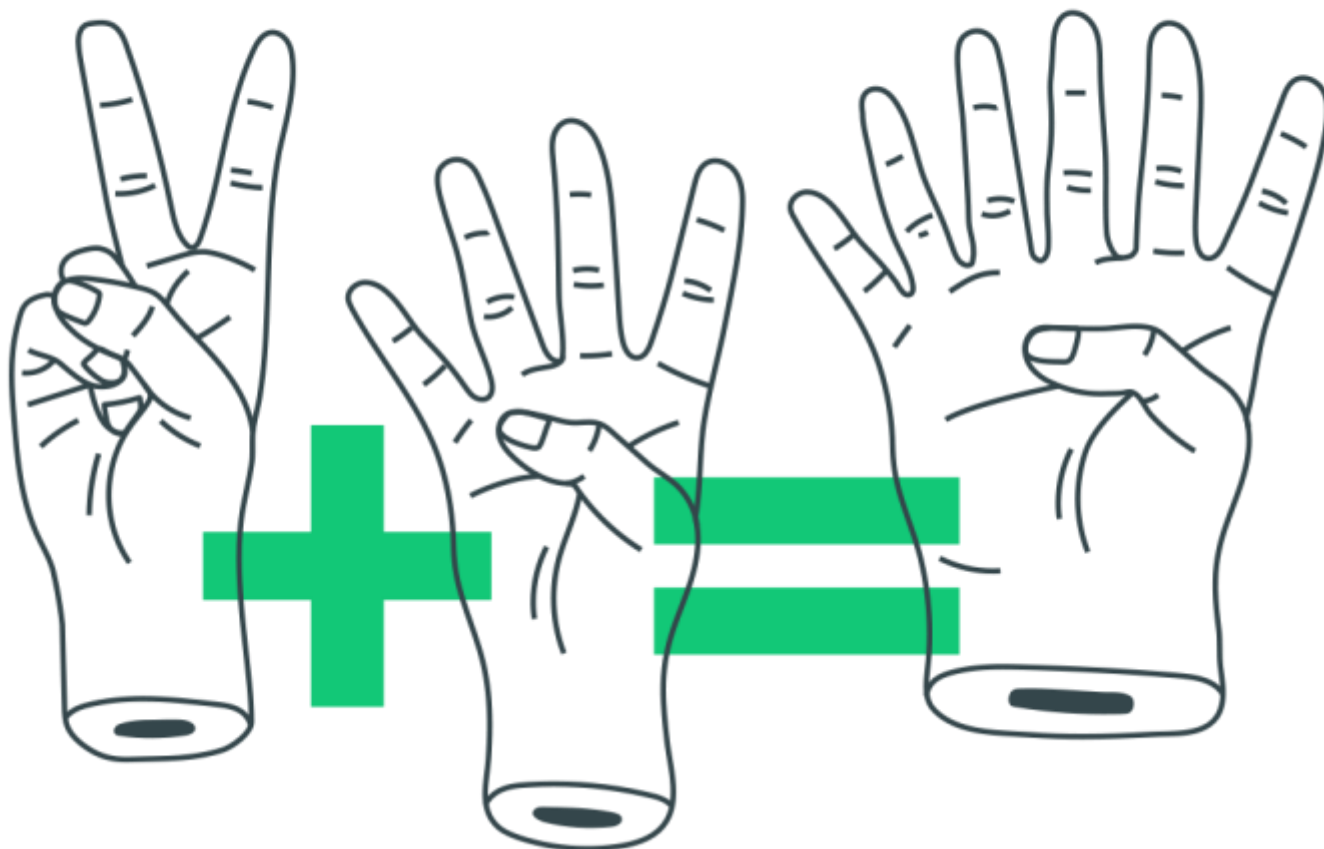
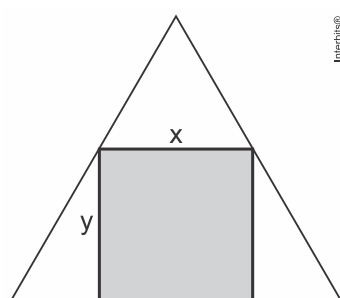


# Resolução de questões de provas específicas de



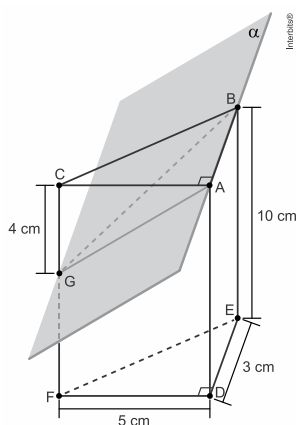
## #6 - Resoluções de Questões Específicas de Matemática

1. Em um triângulo equilátero de perímetro igual a 6 cm, inscreve-se um retângulo de modo que um de seus lados fique sobre um dos lados do triângulo. Observe a figura:



Admitindo que o retângulo possui a maior área possível, determine, em centímetros, as medidas  $x$  e  $y$  de seus lados.

2. Um prisma triangular reto  $ABCDEF$  foi dividido em duas partes por um plano  $\alpha$ , de acordo com a imagem abaixo. Os ângulos  $BAC$  e  $EDF$  das bases do prisma são retos, e o plano  $\alpha$  contém os pontos  $A, B$  e  $G$ , sendo que  $G$  pertence à aresta  $CF$  e dista 4 cm de  $C$ .

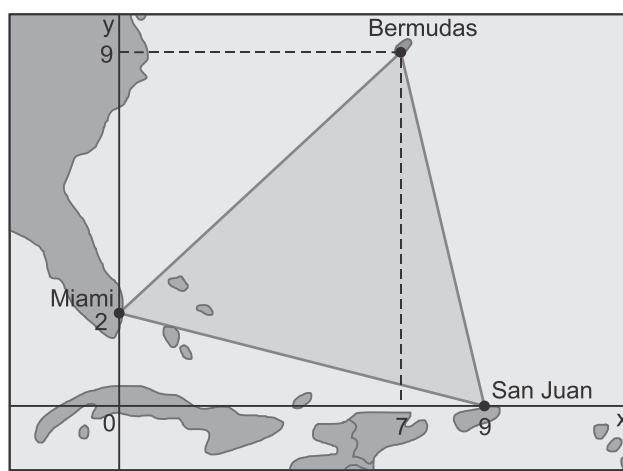


Calcule o volume, em  $\text{cm}^3$ , do maior sólido definido pela separação estabelecida no prisma pelo plano  $\alpha$ .

3. Na região conhecida como Triângulo das Bermudas, localizada no oceano Atlântico, é possível formar um triângulo com um vértice sobre a cidade porto-riquenha de San Juan, outro sobre a cidade

estadunidense de Miami e o terceiro sobre as ilhas Bermudas.

A figura abaixo mostra um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, com os vértices do triângulo devidamente representados. A escala utilizada é 1:17.000.000, e cada unidade nos eixos cartesianos equivale ao comprimento de 1 cm.



Adaptado de <http://mundoestranho.abril.com.br>

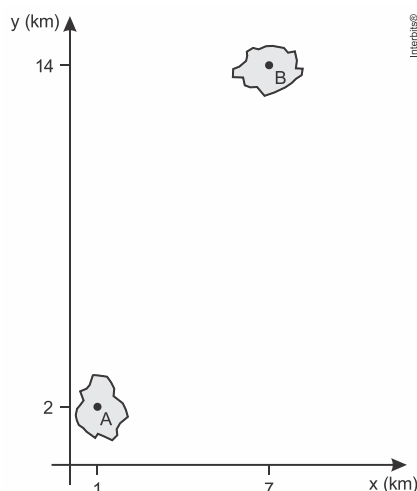
Calcule, em  $\text{km}^2$ , a área do Triângulo das Bermudas, conforme a representação plana da figura.

4. Considere uma matriz  $A$  com 3 linhas e 1 coluna, na qual foram escritos os valores 1, 2 e 13, nesta ordem, de cima para baixo.

Considere, também, uma matriz  $B$  com 1 linha e 3 colunas, na qual foram escritos os valores 1, 2 e 13, nesta ordem, da esquerda para a direita.

Calcule o determinante da matriz obtida pelo produto de  $A \times B$ .

5. Uma ferrovia foi planejada para conter um trecho retilíneo cujos pontos são equidistantes dos centros  $A$  e  $B$  de dois municípios. Em seu projeto de construção, utilizou-se o plano cartesiano, com coordenadas em quilômetros, em que  $A = (1, 2)$  e  $B = (7, 14)$ . Observe o gráfico:



Determine, utilizando esse sistema referencial, a equação da reta suporte desse trecho retilíneo da ferrovia.

6. Considere a sequência de matrizes  $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ , todas quadradas de ordem 4, respectivamente iguais a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 & 47 \end{pmatrix}, \dots$$

Sabendo que o elemento  $a_{ij} = 75432$  é da matriz  $A_n$ , determine os valores de  $n$ ,  $i$  e  $j$ .

7. Um alvo de dardos é formado por três círculos concêntricos que definem as regiões I, II e III, conforme mostra a ilustração.



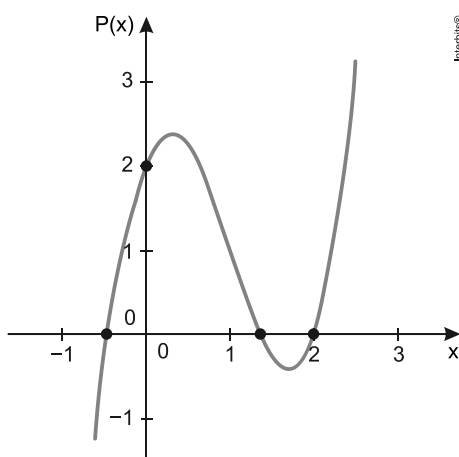
Um atirador de dardos sempre acerta alguma região do alvo, sendo suas probabilidades de acertar as regiões I, II e III denominadas, respectivamente,  $P_I$ ,  $P_{II}$  e  $P_{III}$ .

Para esse atirador, valem as seguintes relações:

- $P_{II} = 3P_I$
- $P_{III} = 2P_{II}$

Calcule a probabilidade de que esse atirador acerte a região I exatamente duas vezes ao fazer dois lançamentos.

8. Observe o gráfico da função polinomial de 3º grau em  $\mathbb{R}$  definida por  $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ .



Determine o conjunto solução da inequação  $P(x) > 0$ .

9. Considere dois números naturais  $ab$  e  $cd$  em que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são seus algarismos.

Demonstre que, se  $ab \cdot cd = ba \cdot dc$ , então  $a \cdot c = b \cdot d$ .

10. Um grupo de alunos de uma escola deveria visitar o Museu de Ciência e o Museu de História da cidade. Quarenta e oito alunos foram visitar pelo menos um desses museus. 20% dos que foram ao de Ciência visitaram o de História e 25% dos que foram ao de História visitaram também o de Ciência.

Calcule o número de alunos que visitaram os dois museus.

## Gabarito

1. A medida do lado do triângulo equilátero é igual a  $\frac{6}{3} = 2$  cm. Logo, sua altura é  $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  cm. Além disso, o retângulo de base  $x$  cm determina um triângulo equilátero de lado igual a  $x$  cm, com  $0 < x < 2$ . Por conseguinte, da semelhança dos triângulos equiláteros, vem

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3} - y}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - y)}{\sqrt{3}}.$$

A área,  $A$ , do retângulo é dada por

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - y)}{\sqrt{3}} \cdot y \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Desde que a área é máxima, temos  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $x = 1$ .

2. O volume do tronco de prisma  $ABGFDE$  é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{DF} \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overline{BE} + \overline{AD} + \overline{GF}) &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (10 + 10 + 6) \\ &= 65 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

3. Se  $s$  é a área no mapa e  $S$  é a área real, então

$$\frac{s}{S} = \left( \frac{1}{17 \cdot 10^6} \right)^2 \Leftrightarrow S = 289 \cdot 10^{12} \cdot s \text{ cm}^2 = 28.900 \cdot s \text{ km}^2.$$

A área no mapa é dada por

$$s = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |81 + 14 - 18| = 38,5 \text{ cm}^2.$$

Portanto, o resultado pedido é

$$S = 28900 \cdot 38,5 = 1.112.650 \text{ km}^2.$$

4. Desde que  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$  e  $B = (1 \ 2 \ 13)$ , temos

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 26 \\ 13 & 26 & 169 \end{pmatrix}.$$

Portanto, observando que a matriz  $A \times B$  apresenta filas proporcionais, podemos concluir que  $\det(A \times B) = 0$ .

5. A reta cujos pontos são equidistantes de A e B é exatamente a mediatriz do segmento de extremos A e B. Portanto, devemos encontrar a equação da reta que passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular a ele.

Cálculo do ponto médio de AB:  $\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+14}{2}\right) = (4, 8) \Leftrightarrow (x_0, y_0)$

Coeficiente angular da reta que passa por A e B:  $\frac{14-2}{7-1} = 2$

Portanto, o coeficiente angular da mediatriz r é  $m_r = -\frac{1}{2}$

Encontrando, agora, a equação da mediatriz r.

$$y - 8 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y - 16 = -x + 4 \Rightarrow x + 2y - 20 = 0$$

6.  $75432 = 4714 \cdot 16 + 8$

Logo,  $n = 4714 + 1 = 4715$  e  $i = 3$  e  $j = 1$ .

7.  $P_I + P_{II} + P_{III} = 1$

$$P_{II} = 3P_I$$

$$P_{III} = 2P_I = 6P_I$$

Logo:

$$P_I + 3P_I + 6P_I = 1$$

$$P_1 = 1/10$$

Portanto, a probabilidade pedida será  $P = (1/10) \cdot (1/10) = 1/100 = 1\%$ .

8. O número 2 é raiz, pois  $p(2) = 0$ .

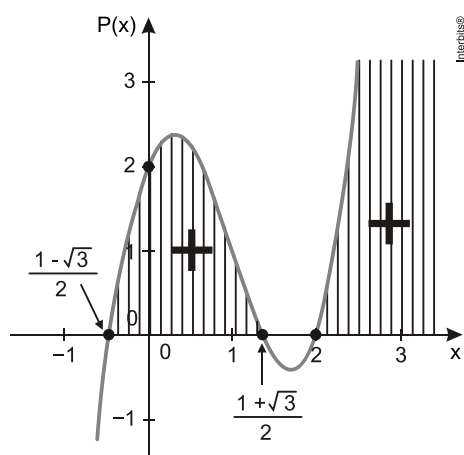
Dividindo  $p(x)$  por  $(x - 2)$ , temos:

2	2	-6	+3	+2
	2	-2	-1	0

Logo,  $P(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + 2x + 1)$

Onde suas raízes são  $x = 2$ ,  $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ .

Resolvendo, agora a inequação  $P(x) > 0$  através do gráfico do polinômio  $P(x)$ .



Portanto, a solução da inequação será dada por  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}$ .

Resposta da questão 9:



$$(10a + b) \cdot (10c + d) = (10b + a) \cdot (10d + c)$$

$$100ac + 10ad + 10bc + bd = 100bd + 10bc + 10ad + ac$$

$$99ac = 99bd$$

$$a \cdot c = b \cdot d$$

10. 6 alunos