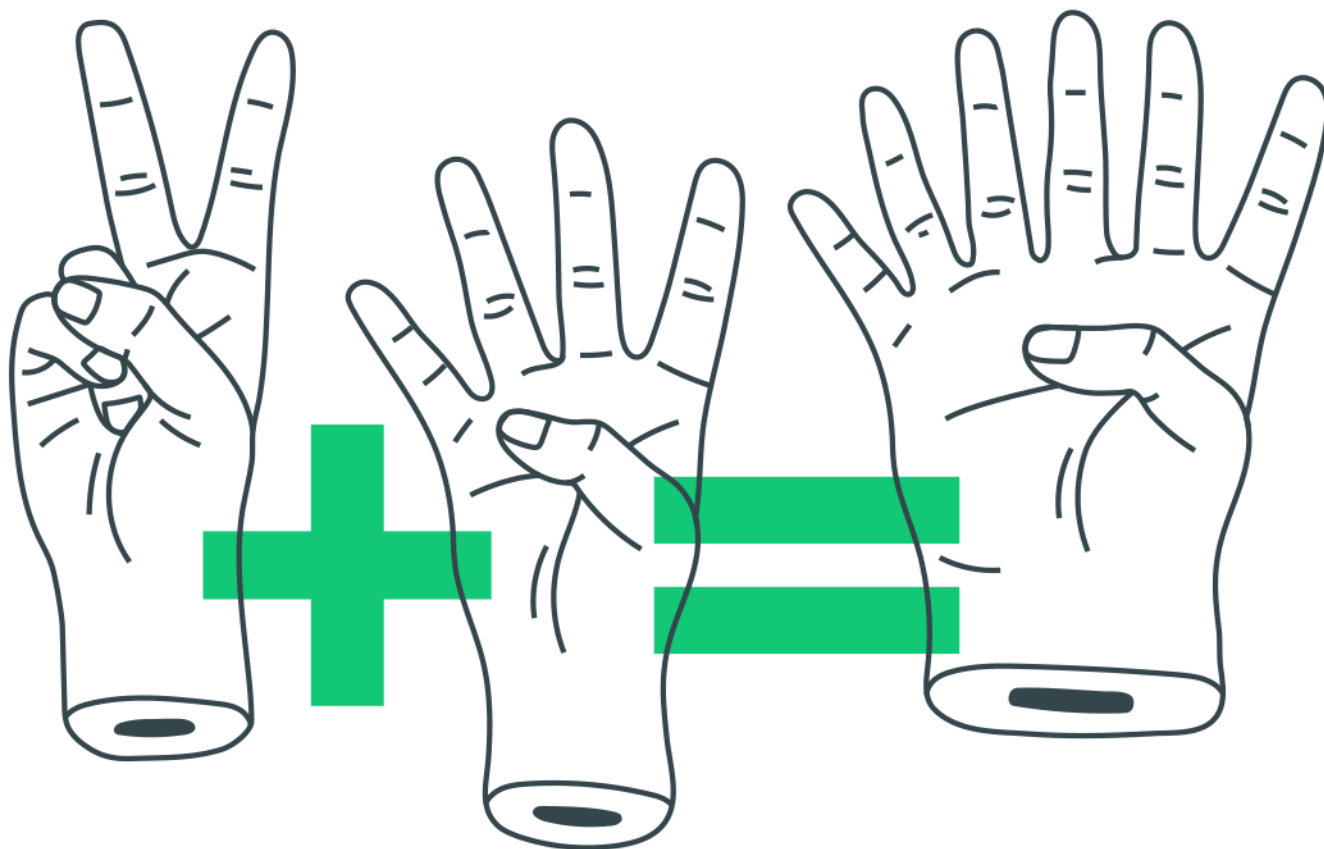


“Números Complexos”



“Números Complexos”

1. (Fuvest 2015) Resolva os três itens abaixo.

a) Calcule $\cos(3\pi/8)$ e $\sin(3\pi/8)$.

b) Dado o número complexo $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$, encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual z^n seja real.

c) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua z como raiz e que não possua raiz real.

2. (Fuvest 2011) a) Sendo i a unidade imaginária, determine as partes real e imaginária do número complexo

$$z_0 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2i} + i.$$

b) Determine um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, que tenha z_0 como raiz.

c) Determine os números complexos w tais que $z_0 \cdot w$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $z_0 \cdot w$ sejam iguais.

d) No plano complexo, determine o número complexo z_1 que é o simétrico de z_0 com relação à reta de equação $y - x = 0$.

3. (Unicamp 2016) Considere o número complexo $z = \frac{1+ai}{a-i}$, onde a é um número real e i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. O valor de z^{2016} é igual a

a) a^{2016} .

b) 1.

c) $1+2016i$.

d) i .

4. (Unesp 2008) Considere o número complexo $z = \cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)$. O valor de $z^3 + z^6 + z^{12}$ é:

- a) $-i$.
- b) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- c) $i - 2$.
- d) i .
- e) $2i$.

5. (Fuvest 2006) Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente

$$|z| = 2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{1-i}\right) = \frac{1}{2}.$$

Lembretes: $i^2 = -1$, se $w = a + bi$, com a e b reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\operatorname{Im}(w) = b$.

6. (Unesp 2001) Considere os números complexos $z_1 = (2 + i)$ e $z_2 = (x + 2i)$, onde i é a unidade imaginária e x é um número real. Determine:

- a) o número complexo $z_1 \cdot z_2$ em função de x ;
- b) os valores de x tais que $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) \leq \operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2)$, onde Re denota a parte real e Im denota a parte imaginária do número complexo.

Gabarito

1.

$$a) \cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(2 \cdot \frac{3\pi}{8} \right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) - \sin^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) - \left(1 - \cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) \right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) - 1$$

$$\cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Calculando agora o valor do $\sin \left(\frac{3\pi}{8} \right)$:

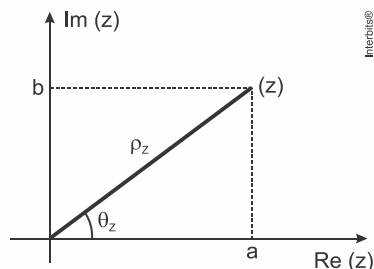
$$\sin^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) = 1 - \cos^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right)$$

$$\sin^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right)^2$$

$$\sin^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \left(\frac{3\pi}{8} \right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

b) Teremos:



$$a = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ e } b = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\rho_z = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ logo,}$$

$$\rho_z = \sqrt{2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}} \Rightarrow \rho_z = 2.$$

$$\operatorname{tg} \theta_z = \frac{b}{a}, \text{ logo,}$$

$$\operatorname{tg} \theta_z = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

Do item [A], temos:

$$\operatorname{tg} \theta_z = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \text{ ou } \theta_z = \frac{3\pi}{8}.$$

Assim, na forma trigonométrica, temos:

$$z = \rho_z (\cos \theta_z + i \operatorname{sen} \theta_z) \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8} \right) \Rightarrow$$

$$z^n = 2^n \left[\cos \left(n \frac{3\pi}{8} \right) + i \operatorname{sen} \left(n \frac{3\pi}{8} \right) \right].$$

$$\text{Se } z^n \text{ é real: } \operatorname{sen} \left(n \frac{3\pi}{8} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$n \frac{3\pi}{8} = 0 \text{ (não convém, pois } n > 0)$$

$$n \frac{3\pi}{8} = \pi \Rightarrow n = \frac{8}{3} \text{ (não convém, pois } n \notin \mathbb{Z})$$

$$n \frac{3\pi}{8} = 2\pi \Rightarrow n = \frac{16}{3} \text{ (não convém, pois } n \notin \mathbb{Z})$$

$$n \frac{3\pi}{8} = 3\pi \Rightarrow n = 8$$

resposta: $n = 8$.

c) Do item [B], concluímos que z^n é real para $n = 8$ ou $n = 16$, ou $n = 24$, etc.

Supondo $n = 8$, temos:

$$z^n = 2^n \left[\cos\left(\frac{3n\pi}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(n \frac{3\pi}{8}\right) \right].$$

$$z^8 = 2^8 [\cos(3\pi) + i \operatorname{sen}(3\pi)] \Rightarrow z^8 = -256.$$

Logo, o polinômio procurado é: $z^8 + 256 = 0$.

2.

$$z_0 = \frac{1-i}{(1+i)(1+i)} - \frac{i}{2i} + i$$

$$a) z_0 = \frac{1-i}{2} + \frac{i}{2} + 1$$

$$z_0 = \frac{1+2i}{2} \Leftrightarrow z_0 = \frac{1}{2} + 1.i$$

Parte real = $\frac{1}{2}$ e parte imaginária = $1.i$

b) Se $\frac{1}{2} + i$ é raiz, então seu conjugado $\frac{1}{2} - i$ também será.

$$\text{Calculando a soma das raízes } S = \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} - i = 1$$

$$\text{Calculando o produto de raízes: } P = \left(\frac{1}{2} + i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - i\right) = \frac{5}{4}$$

Utilizando a equação $x^2 - S.x + P = 0$, temos:

$$x^2 - x + \frac{5}{4} = 0 \text{ (multiplicando por 4)}$$

$$4x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$c) z_0 \cdot w = 5\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

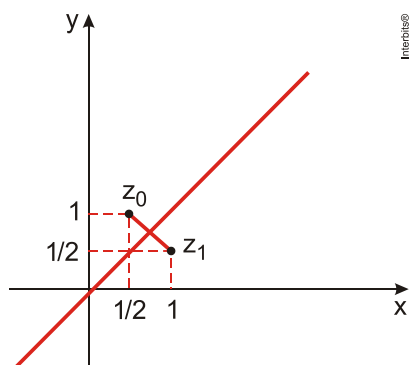
$$W = \frac{5(1+i)}{\frac{1}{2} + i} = 6 - 2i$$

Ou

$$z_0 \cdot w = 5\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$W = \frac{5(-1-i)}{\frac{1}{2}+i} = -6 + 2i$$

d)

Resposta: $Z_1 = 1 + \frac{1}{2}i$

3.

[B]

4.

Tem-se que

$$z = \frac{1+ai}{a-i} = \frac{1+ai}{a-i} \cdot \frac{a+i}{a+i} = \frac{a+i+a^2i-a}{a^2+1} = i.$$

Portanto, o valor de z^{2016} é $i^{2016} = i^0 = 1$.

[D]

5.

 $z = 2i$ ou $z = -2$.

6.

a) $z_1 \cdot z_2 = (2x - 2) + (x + 4)i$

b) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 6\}$