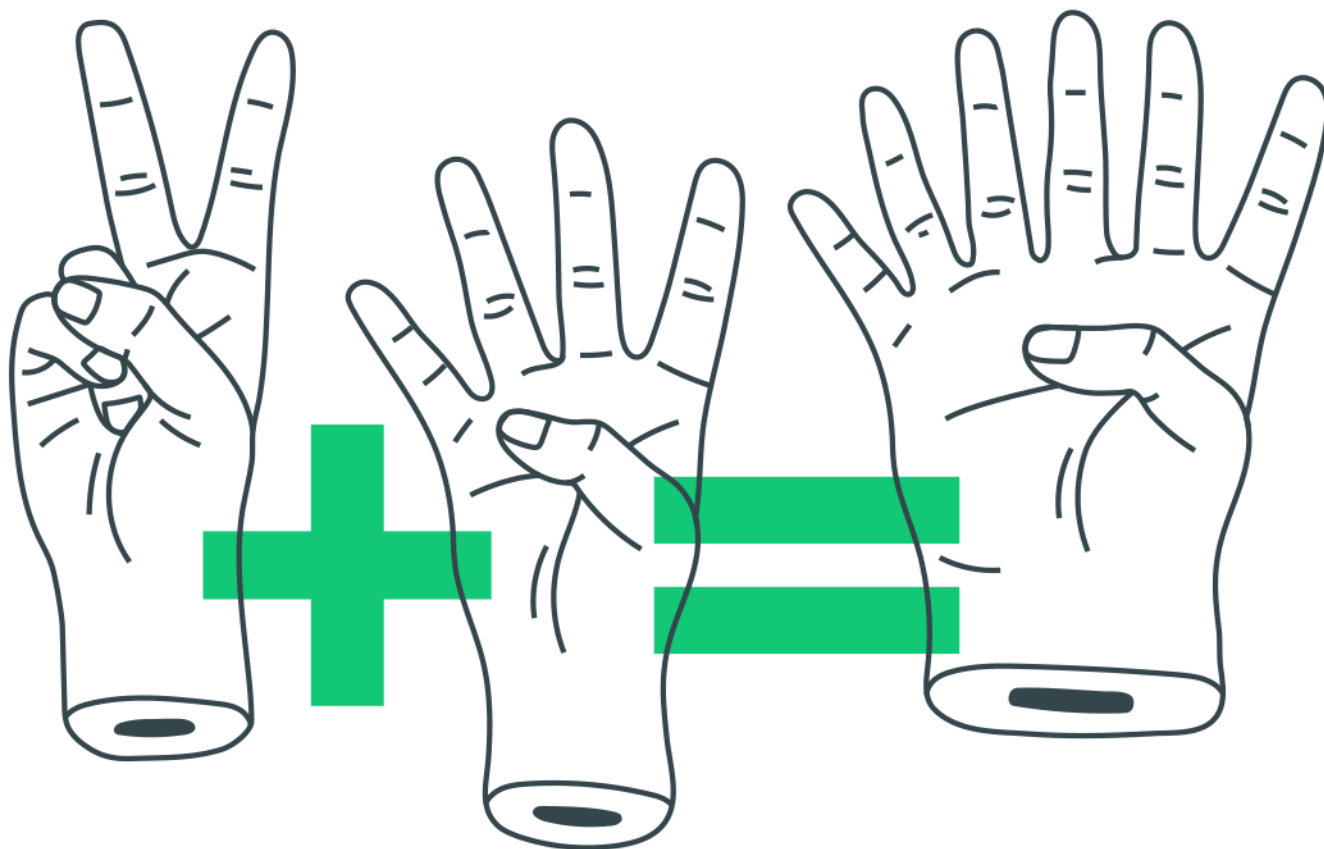


“Equações, Inequações e Sistemas Lineares”



“Equações, Inequações e Sistemas Lineares”

1. (Unesp 2016) Uma imobiliária exige dos novos locatários de imóveis o pagamento, ao final do primeiro mês no imóvel, de uma taxa, junto com a primeira mensalidade de aluguel.

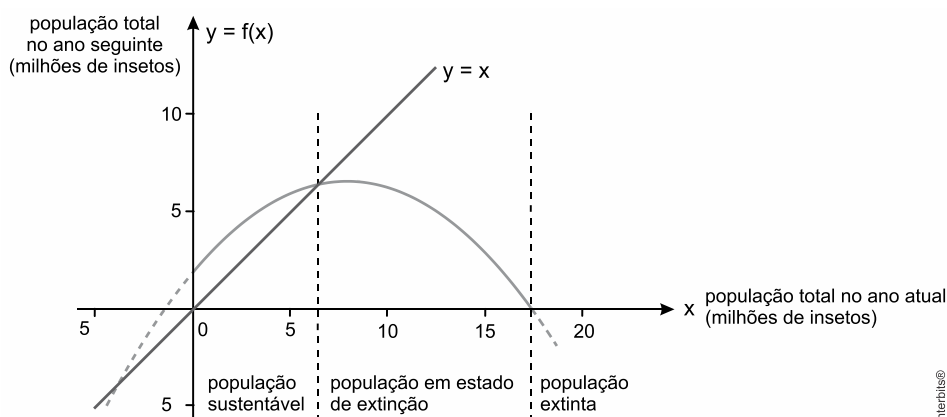
Rafael alugou um imóvel nessa imobiliária e pagou R\$ 900,00 ao final do primeiro mês. No período de um ano de ocupação do imóvel, ele contabilizou gastos totais de R\$ 6.950,00 com a locação do imóvel.

Na situação descrita, a taxa paga foi de

- a) R\$ 450,00.
- b) R\$ 250,00.
- c) R\$ 300,00.
- d) R\$ 350,00.
- e) R\$ 550,00.

2. (Unesp 2016) O gráfico da parábola dada pela função $f(x) = -\frac{3}{40}(x^2 - 16x - 24)$ indica, para uma determinada população de insetos, a relação entre a população total atual (x) e a população total no ano seguinte, que seria $f(x)$. Por exemplo, se a população atual de insetos é de 1 milhão ($x = 1$), no ano seguinte será de 2,925 milhões, já que $f(1) = 2,925$.

Dizemos que uma população de insetos está em tamanho sustentável quando a população total do ano seguinte é maior ou igual a população total atual, o que pode ser identificado graficamente com o auxílio da reta em azul ($y = x$).



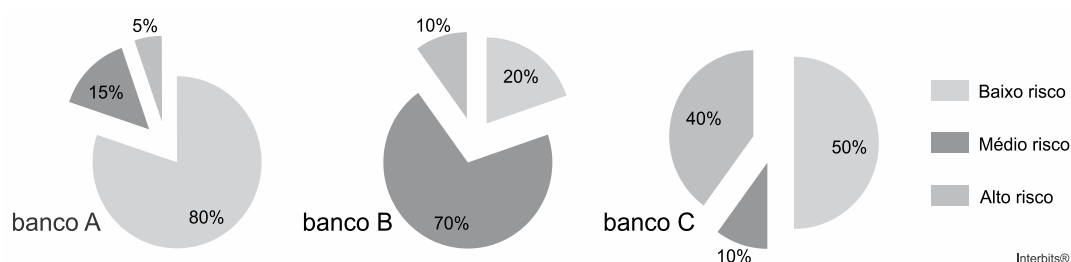
Determine a população total atual de insetos para a qual, no ano seguinte, ela será igual a zero (adote $\sqrt{22} = 4,7$), e determine a população total atual para qual a sustentabilidade é máxima, ou seja, o valor de x para o qual a diferença entre a população do ano seguinte e do ano atual, nessa ordem, é a maior possível.

3. (Unesp 2016) A demanda de um produto químico no mercado é de D toneladas quando o preço por tonelada é igual a P (em milhares de reais). Neste preço, o fabricante desse produto oferece F toneladas ao mercado. Estudos econômicos do setor químico indicam que D e F variam em função de P , de acordo com as seguintes funções:

$$D(p) = \frac{3p^2 - 21p}{4 - 2p} \text{ e } F(p) = \frac{5p - 10}{3}$$

Admitindo-se $P > 1$ e sabendo que $\sqrt{7569} = 87$, determine o valor de P para o qual a oferta é igual à demanda desse produto. Em seguida, e ainda admitindo-se $P > 1$, determine o intervalo real de variação de P para o qual a demanda $D(p)$ do produto é positiva.

4. (Unesp 2016) Os gráficos indicam a diversificação de aplicações para um investimento, por grau de risco, sugeridas por cada um dos bancos A, B e C.

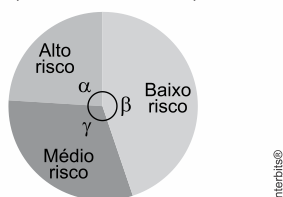


Um investidor decidiu aplicar um capital de R\$ 6.000,00 em partes que foram distribuídas pelos três bancos, seguindo a diversificação do grau de risco sugerida por cada banco. O capital aplicado foi distribuído da seguinte forma:

- total de R\$ 1.000,00 no banco A (considerando os três graus de risco juntos);
- R\$ 2.700,00 em investimentos de baixo risco (nos três bancos juntos);
- R\$ 1.850,00 em investimentos de médio risco (nos três bancos juntos);
- R\$ 1.450,00 em investimentos de alto risco (nos três bancos juntos).

O gráfico a seguir representa a diversificação da aplicação, por grau de risco, juntando os três bancos.

Investimento total de R\$ 6.000,00
(bancos A, B e C)



Calcule os montantes de capital que foram investidos nos bancos B e C, e as medidas dos ângulos α , β e γ , indicados no gráfico.

5. (Unicamp 2015) Considere o sistema linear nas variáveis x , y e z

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 7x + 8y - mz = 26, \end{cases}$$

onde m é um número real. Sejam $a < b < c$ números inteiros consecutivos tais que $(x, y, z) = (a, b, c)$ é uma solução desse sistema. O valor de m é igual a

- a) 3.
- b) 2.
- c) 1.
- d) 0.

6. (Fuvest 2016) As constantes A , B , C e D são tais que a igualdade

$$\frac{1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Dx + C}{x^2 + 4}$$

é válida para $x \in \mathbb{R}$.

- a) Deduza, da igualdade acima, um sistema linear com quatro equações, satisfeito pelas constantes A , B , C e D .
- b) Resolva esse sistema e encontre os valores dessas constantes.

Gabarito

1.

[D]

Se t é a taxa pedida, então

$$t + 12(900 - t) = 6950 \Leftrightarrow 11t = 3850 \\ \Leftrightarrow t = \text{R\$ } 350,00.$$

2. Para determinar a população total atual de insetos para a qual, no ano seguinte, ela será igual a zero é preciso fazer $f(x)$ igual a zero. Ou seja:

$$f(x) = -\frac{3}{40}(x^2 - 16x - 24)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 16x - 24$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) \Rightarrow \Delta = 352$$

$$\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{22} \Rightarrow \sqrt{\Delta} \approx 18,8$$

$$x = \frac{16 \pm 18,8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 17,4 \text{ milhões} \\ x = -1,4 \text{ (não convém!)} \end{cases}$$

Assim a população total atual de insetos para a qual, no ano seguinte, ela será igual a zero é de 17,4 milhões.

Para analisar a diferença entre a população do ano seguinte e do ano atual, pode-se escrever:

$$g(x) = f(x) - x$$

$$g(x) = -\frac{3}{40}(x^2 - 16x - 24) - x \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{40}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$$

O gráfico de $g(x)$ também será uma parábola. O valor de x para que essa função seja máxima será no seu vértice, ou seja:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{3}{40}\right)} \rightarrow x_v = \frac{4}{3}$$

3. Sendo $p > 1$, vem

$$\begin{aligned}D(p) = F(p) &\Rightarrow \frac{3p^2 - 21p}{4 - 2p} = \frac{5p - 10}{3} \\&\Rightarrow 19p^2 - 103p + 40 = 0 \\&\Rightarrow p = 5.\end{aligned}$$

Ademais, temos

$$\begin{aligned}\left| \begin{array}{l} D(p) > 0 \\ p > 1 \end{array} \right| &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{3p^2 - 21p}{4 - 2p} > 0 \\ p > 1 \end{array} \right| \\&\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{p(p - 7)}{p - 2} < 0 \\ p > 1 \end{array} \right| \\&\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (p < 0 \text{ ou } 2 < p < 7) \\ e \\ (p > 1) \end{array} \right| \\&\Leftrightarrow 2 < p < 7.\end{aligned}$$

4. Sabendo-se que foi investido R\$ 1.000,00 no banco A seguindo a diversificação do grau de risco apresentada no gráfico, pode-se escrever:

Banco A:

- baixo risco: $80\% \rightarrow 1000 \cdot 0,8 = \text{R\$ } 800,00$
- médio risco: $15\% \rightarrow 1000 \cdot 0,15 = \text{R\$ } 150,00$
- alto risco: $5\% \rightarrow 1000 \cdot 0,05 = \text{R\$ } 50,00$

Sabe-se ainda que foram aplicados:

- R\$ 2.700,00 em investimentos de baixo risco, sendo 80% no banco A (correspondente a R\$ 800,00), R\$ 800,00, 20% no banco B e 50% no banco C;
- R\$ 1.850,00 em investimentos de médio risco, sendo 15% no banco A (correspondente a R\$ 150,00), 70% no banco B e 10% no banco C;
- R\$ 1.450,00 em investimentos de alto risco, sendo 5% no banco A (correspondente a R\$ 50,00), 10% no banco B e 40% no banco C;

Sendo B e C o montante aplicado em cada um dos bancos, respectivamente, e com as demais informações do enunciado, pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 50 + 0,1B + 0,4C = 1450 \\ 150 + 0,7B + 0,1C = 1850 \\ 800 + 0,2B + 0,5C = 2700 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,1B + 0,4C = 1400 \\ 0,7B + 0,1C = 1700 \\ 0,2B + 0,5C = 1900 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,8B + 0,5C = 3100 \\ -0,2B - 0,5C = -1900 \end{cases}$$

$$0,6B = 1200 \rightarrow B = 2000$$

$$0,8 \cdot 2000 + 0,5C = 3100 \rightarrow 0,5C = 1500 \rightarrow C = 3000$$

Assim, os montantes aplicados em cada banco foram de R\$ 1.000,00 no banco A, R\$ 2.000,00 no banco B e R\$ 3.000,00 no banco C.

Para calcular os ângulos α , β e γ , indicados no gráfico pode-se utilizar a regra de três:

Baixo Risco

6000 — 360°

2700 — β

$$\beta = \frac{2700 \cdot 360}{6000} \rightarrow \beta = 162^\circ$$

Médio Risco

6000 — 360°

1850 — γ

$$\gamma = \frac{1850 \cdot 360}{6000} \rightarrow \gamma = 111^\circ$$

Alto Risco

6000 — 360°

1450 — α

$$\alpha = \frac{1450 \cdot 360}{6000} \rightarrow \alpha = 87^\circ$$

5. [A]

Sejam $a < b < c$ números inteiros consecutivos, temos $b = a + 1$ e $c = a + 2$. Em consequência, da primeira equação do sistema, vem

$$a + 2 \cdot (a + 1) + 3 \cdot (a + 2) = 20 \Leftrightarrow a = 2.$$

Assim, encontramos $(x, y, z) = (2, 3, 4)$ e, portanto, temos $7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - m \cdot 4 = 26$, implicando em $m = 3$.

6. a) Resolvendo a igualdade, pode-se escrever:

$$\frac{1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 4) + (Dx + C)(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)}$$

$$Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Dx^3 + 2Dx^2 + 2Dx + Cx^2 + 2Cx + 2C = 1$$

$$(A + D)x^3 + (B + C + 2D)x^2 + 2(2A + C + D)x + (4B + 2C) = 1$$

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ B + C + 2D = 0 \\ 2A + C + D = 0 \\ 4B + 2C = 1 \end{cases}$$

b) Resolvendo o sistema, tem-se:

$$\begin{cases} A + D = 0 \times (-2) + L3 \\ B + C + 2D = 0 \\ 2A + C + D = 0 \\ 4B + 2C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + D = 0 \times (-4) + L4 \\ B + C + 2D = 0 \\ C - D = 0 \\ 4B + 2C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + D = 0 \\ B + C + 2D = 0 \\ C - D = 0 \times (-2) + L4 \\ -8D - 2C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + D = 0 \\ B + C + 2D = 0 \\ C - D = 0 \times (-2) + L4 \\ -10D = 1 \end{cases}$$

$$C = D = -\frac{1}{10}$$

$$A = \frac{1}{10}$$

$$B = \frac{3}{10}$$

