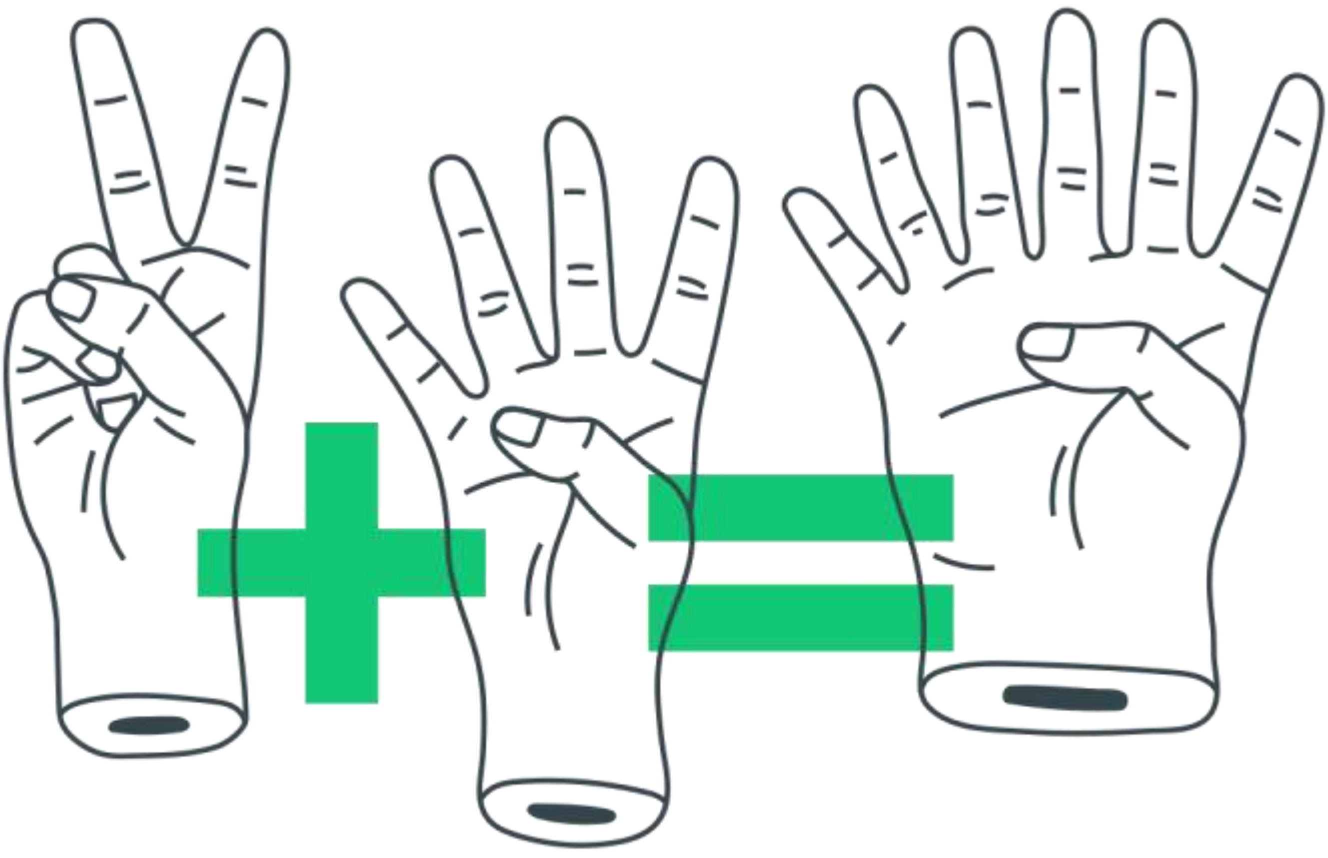
descomplica

LISTA DE EXERCÍCIOS

Matemática

PC Sampaio
(Allan Pinho)
10.11.2016

Trigonometria: Linhas Trigonométricas, Funções e Gráficos



Trigonometria: Linhas Trigonométricas, Funções e Gráficos

1. (UERJ) Considere a matriz A3 × 3 abaixo:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & 1 \\ a_{31} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada elemento desta matriz é expresso pela seguinte relação:

$$a_{ij} = 2 \times (\text{sen}\,\theta_i) \times (\cos\theta_j) \qquad \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

Nessa relação, os arcos θ_1, θ_2 e θ_3 são positivos e menores que $\frac{\pi}{3}$ radianos.
Calcule o valor numérico do determinante da matriz A.

2. (UERJ) CONSIDERE O TEOREMA E OS DADOS A SEGUIR PARA SOLUÇÃO DESTA QUESTÃO

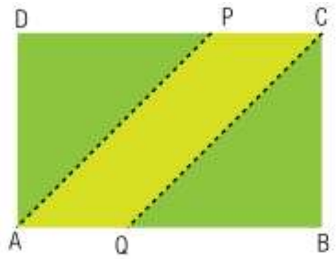
Se α, β e $\alpha + \beta$ são três ângulos diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - (tg\alpha)(tg\beta)}.$$

a, b e c são três ângulos agudos, sendo $tgb = 2$ e $tg(a + b + c) = \frac{4}{5}$.

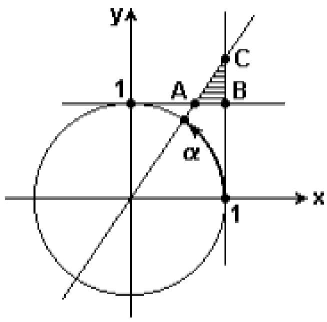
Calcule a tg(a – b + c)

3. (UERJ) Um terreno retangular tem 800 m de perímetro e será dividido pelos segmentos PA e CQ em três partes, como mostra a figura.



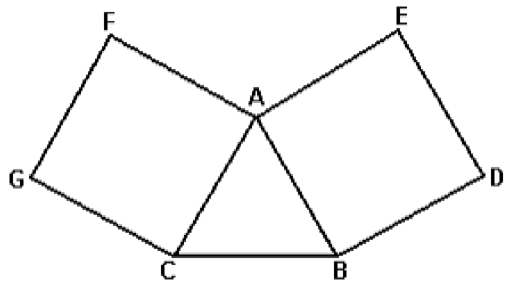
Admita que os segmentos de reta PA e CQ estão contidos nas bissetrizes de dois ângulos retos do terreno e que a área do paralelogramo PAQC tem medida S. Determine o maior valor, em m², que S pode assumir.

4. (Unifesp) Com base na figura, que representa o círculo trigonométrico e os eixos da tangente e da cotangente,



a) calcule a área do triângulo ABC, para $\alpha = \pi/3$
b) determine a área do triângulo ABC, em função de α, $\pi/4 < \alpha < \pi/2$

5. (Unirio) Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado L, ABDE e AFGC são quadrados. Calcule a distância DG, em função de L.



Gabarito

1. Gabarito Oficial:
   Observando-se os elementos da diagonal principal da matriz, juntamente com a relação que os define, conclui-se que:
   $a_{22} = a_{33} = 1 = 2 \text{ sen } \theta_2 \cos \theta_2 = 2 \text{ sen } \theta_3 \cos \theta_3$
   $\text{sen } (2\theta_2) = \text{sen } (2\theta_3) = 1$
   Ou seja:
   $\theta_2 = \theta_3 = 45^o$
   Desse modo, a matriz apresenta duas colunas iguais e, consequentemente, seu determinante é 0.
2. Gabarito oficial:

$$tg(a+c)=t \Rightarrow tg[(a+c)+b]=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{t+2}{1-2t}=\frac{4}{5} \Rightarrow t=-\frac{6}{13}$$

$$tg[(a+c)-b]=\frac{-\frac{6}{13}-2}{1-\frac{12}{13}}=-32$$

3. Gabarito oficial:

$$\overline{PC}=\overline{AQ}=y$$

$$\overline{AD}=\overline{DP}=x$$

$$2y+4x=800 \Rightarrow y+2x=400 \Rightarrow y=400-2x$$

$$S=yx=(400-2x)\,x=-2x^2+400x$$

Logo:

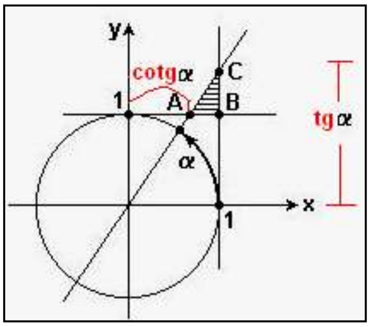
$$S_{\text{máxima}}=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=\frac{-(160000-0)}{-8}=20.000\text{ m}^2$$

4.

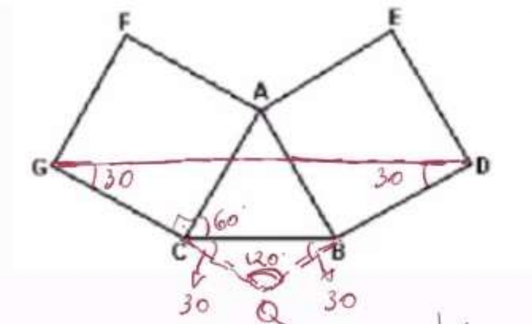
$$\text{base}: \overline{AB} = 1 - \cot g\alpha \; ; \quad \text{altura}: \overline{BC} = tg\alpha - 1$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{(1 - \cot g\alpha) \times (tg\alpha - 1)}{2} \\ tg\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot g\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \dfrac{\left(\dfrac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) \times \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{3} - 3 - 3 + \sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3} - 6}{6} = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$



5.



Perceba que Δ QGB é semelhante ao Δ QCB.

Precisamos descobrir QC para montar a semelhança:

$$\frac{QC}{\text{sen}\,30} = \frac{L}{\text{sen}\,120}$$

$$\frac{QC}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{L}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{QC = \frac{L\sqrt{3}}{3}}$$

Da semelhança, temos:

$$\frac{CB}{GD} = \frac{CQ}{GC}$$

$$\frac{L}{GD} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{3}}{L + \frac{L\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{L}{GD} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{\cancel{3}}}{\frac{3L + L\sqrt{3}}{\cancel{3}}}$$

$$\cancel{L}(3L + L\sqrt{3}) = \cancel{L}\sqrt{3} \cdot GD$$

$$\frac{3L + L\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = GD$$

$$\frac{\cancel{3}\sqrt{3}L + \cancel{3}L}{\cancel{3}} = GD$$

$$\boxed{GD = L(\sqrt{3} + 1)}$$