

Progressão Geométrica: Soma



Progressão Geométrica: Soma

1. Obtenha a soma:

- a) das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- b) dos 20 termos iniciais da série $1 + 3 + 9 + 27 + \dots$

2. Determine:

- a) o quarto termo da progressão geométrica de quatro termos cujo a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5.
- b) a medida da base de um triângulo sabendo que a base, a altura e a área dele formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 8.

3. Em uma progressão geométrica infinitamente decrescente, cuja soma é igual a 9 e a soma dos quadrados de todos os seus termos é 40,5, o seu 4º termo vale:

- a) $\frac{3}{8}$
- b) $\frac{1}{27}$
- c) $\frac{5}{32}$
- d) $\frac{2}{9}$
- e) $\frac{4}{27}$

4. Os divisores positivos do número 3^{10} são $3^0, 3^1, 3^2$ etc. A soma de todos esses divisores é

- a) $(3^{11} - 1)/2$.
- b) $(3^{10} - 1)/2$.
- c) $(3^9 - 1)/2$.
- d) 3^{10} .
- e) $3^{10} - 1$

5. Seja (b_1, b_2, b_3, b_4) uma progressão geométrica de razão $1/3$. Se $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 20$, então b_4 é igual a:

- a) $1/2$.
- b) $3/2$.
- c) $5/2$.
- d) $7/2$.

6. A soma dos $2n$ primeiros termos da sequência $(2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, \dots)$ é 410. Então n vale:

- a) 7.
- b) 8.
- c) 9.
- d) 10.
- e) 11.

7. A soma dos termos da sequência $(1/2; 1/3; 2/9; 4/27; \dots)$ é:

- a) 15×10^{-1} .
- b) -3×10^{-1} .
- c) 15×10^{-2} .
- d) 5×10^{-1} .
- e) $3/5$.

8. Seja (a_1, a_2, a_3, \dots) uma progressão geométrica infinita de razão a_1 , $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

- a) $8/27$
- b) $20/27$
- c) $26/27$
- d) $30/27$
- e) $38/27$

9. Há exatamente um ano, José iniciou uma criação de coelhos e, durante este período, o número de coelhos duplicou a cada 3 meses. Hoje, preocupado com a falta de espaço para os coelhos, José vai vender parte dessa criação, de modo que apenas a quantidade inicial fique com ele. Se N_0 denota a quantidade inicial de coelhos, então a quantidade a ser vendida é

- a) $15 N_0$
- b) $13 N_0$
- c) $12 N_0$
- d) $8 N_0$
- e) $7 N_0$

10. Um aluno do curso de biologia estudou durante nove semanas o crescimento de uma determinada planta, a partir de sua germinação. Observou que, na primeira semana, a planta havia crescido 16 mm. Constatou ainda que, em cada uma das oito semanas seguintes, o crescimento foi sempre a metade do crescimento da semana anterior. Dentre os valores a seguir, o que MELHOR aproxima o tamanho dessa planta, ao final dessas nove semanas, em milímetros, é:

- a) 48.
- b) 36.
- c) 32.
- d) 30.
- e) 24.

Vem que tem mais!

Lenda do Criador do Xadrez

Conta-se que o criador do jogo de xadrez, ao ser chamado por seu rei desejoso de recompensá-lo, fez o seguinte pedido: 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos de trigo pela segunda e assim sucessivamente, sempre dobrando, até a última das 64 casas. Tempos depois, o soberano deve ter sido informado por sua assessoria especializada de que jamais conseguiria satisfazer àquele pedido aparentemente despretensioso, mas que significava uma quantidade fabulosa de trigo. Em nosso sistema de numeração, esse número de grãos é representado com 20 algarismos."

*Fonte: Matemática: 2ª série, 2º grau. Gelson lezzi e outros.
São Paulo, Atual Ed., 1976. 356 p. Ilust.*

Qual a quantidade de grãos que o inventor do xadrez teria ganhado?

Gabarito

1. a) 1023/512
b) $(3^{20} - 1)/2$
2. a) 8
b) 16
3. D
4. A
5. A
6. D
7. A
8. E
9. A
10. C

Gabarito “Vem que tem mais”!

Como um tabuleiro de xadrez tem 64 casas, trata-se de obter a soma dos 64 termos de uma progressão geométrica finita, cujo primeiro termo (a_1) é igual a 1 e razão (q) igual a 2, representando-se a nossa progressão desta forma:

P.G. = $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{64})$, onde $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ e a_{64} , são, respectivamente, o primeiro, segundo, o terceiro, o quarto e assim por diante, até o sexagésimo quarto termo. A razão, que denominamos q , é o quociente entre dois termos vizinhos: $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \dots = q$.

Portanto, eis a nossa progressão:

P.G. = $(1, 2, 4, 8, \dots, \text{[aqui, o } 64^\circ \text{ termo]})$ ou P.G. = $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{63})$, com $q = 2$ (neste caso).

Sem muito trabalho de demonstração, chegaríamos à fórmula determinante da soma dos termos de uma progressão geométrica finita, $S_n = (a_n \cdot q - a_1) / (q - 1)$, onde n representa o número de termos, q a razão da progressão e a_1 o primeiro termo.

E, aplicando-se ao nosso caso do tabuleiro de xadrez, obtemos:

$$S_{64} = (a_{64} \cdot 2 - 1) / (2 - 1) = (2^{63} \cdot 2 - 1) = 2^{64} - 1 = \mathbf{18446744073709551615}.$$

Isto mesmo, 18 quintilhões, 446 quatrilhões, 744 trilhões, 73 bilhões, 709 milhões, 551 mil, 615 (ufa!) – um número astronômico! Como se vê, o criador do xadrez não tinha nada de bobo!

Fonte: <http://www.muniz.pro.br/>