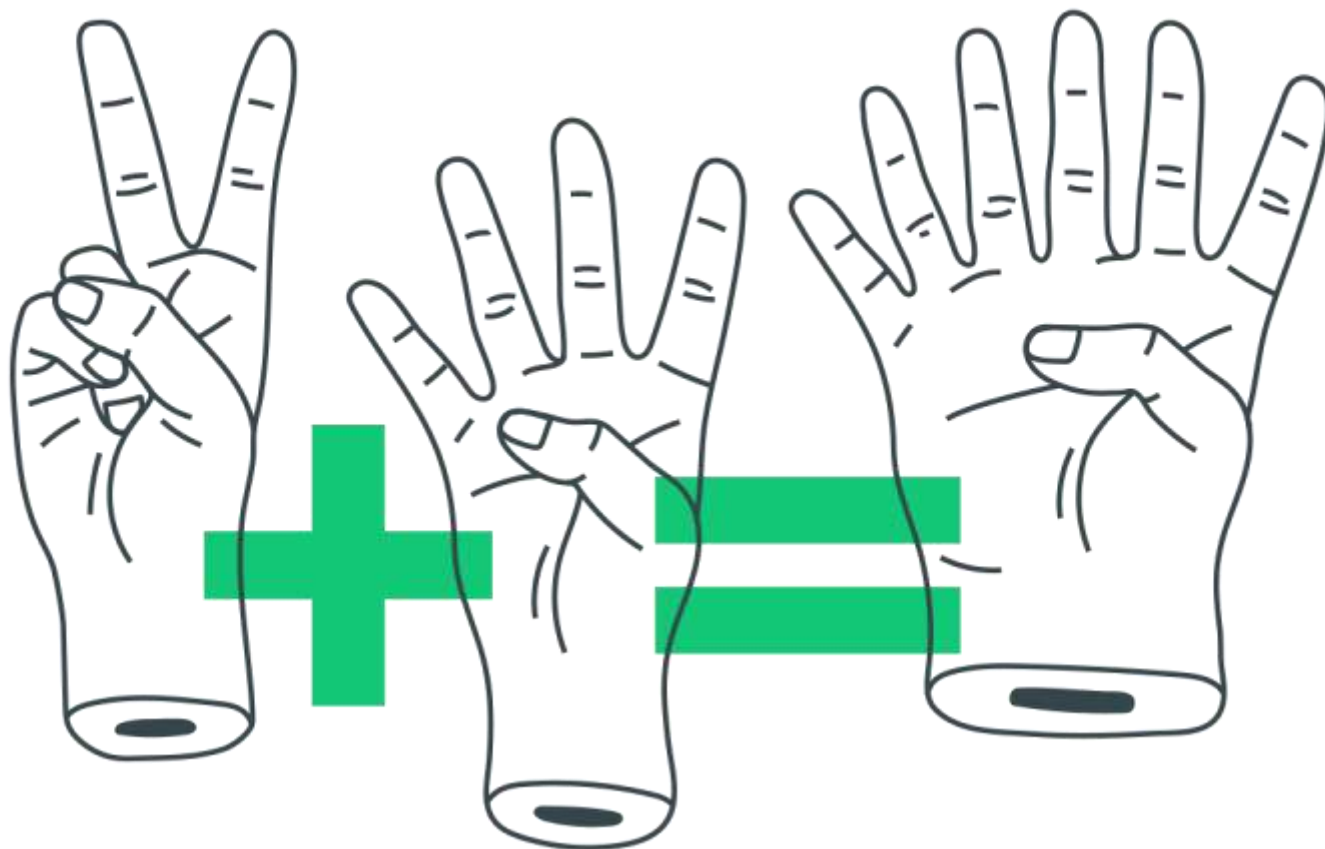
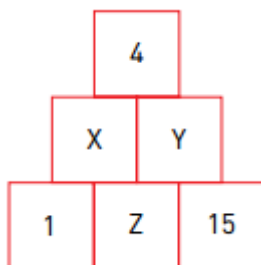


# Sistemas Lineares



## Sistemas Lineares

1. A ilustração abaixo mostra seis cartões numerados organizados em três linhas. Em cada linha, os números estão dispostos em ordem crescente, da esquerda para a direita. Em cada cartão, está registrado um número exatamente igual à diferença positiva dos números registrados nos dois cartões que estão imediatamente abaixo dele. Por exemplo, os cartões 1 e Z estão imediatamente abaixo do cartão X.



Determine os valores de X, Y e Z.

2. (Fuvest) No sistema

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$$

Na variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $a$  e  $m$  são constantes reais. É correto afirmar:

- a) No caso em que  $a = 1$ , o sistema tem solução se, e somente se,  $m = 2$ .
- b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de  $a$  e de  $m$ .
- c) No caso em que  $m = 2$ , o sistema tem solução se, e somente se,  $a = 1$ .
- d) O sistema só tem solução se  $a = m = 1$ .
- e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de  $a$  e de  $m$ .

3. (UERJ) Ao final de um campeonato de futebol, foram premiados todos os jogadores que marcaram 13, 14 ou 15 gols cada um. O número total de gols realizados pelos premiados foi igual a 125 e, desses atletas, apenas cinco marcaram mais de 13 gols. Calcule o número de atletas que fizeram 15 gols.

4. (UFRJ) A Polícia Federal interceptou duas malas de dinheiro, num total de R\$ 3.000.000,00 somente em notas de 100 e de 50 reais. A quantidade de cédulas de 100 da mala preta era igual à de cédulas de 50 da mala marrom e vice-versa.

a) Calcule o número total de cédulas encontradas.

b) Após a perícia, um policial encheu a mala preta com algumas notas de 100 reais e pôs as cédulas restantes na mala marrom, de modo que as duas malas ficaram com quantias iguais. Quantas notas foram colocadas na mala marrom?

5. (Fuvest) João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando R\$21,50. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando R\$ 57,00. Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza R\$ 10,00, calcule o preço de cada um desses itens.

## Gabarito

1. Gabarito Oficial:

$$\begin{cases} Y - X = 4 \\ Z - 1 = X \\ 15 - Z = Y \end{cases}$$

Somando as duas últimas equações, encontra-se o sistema

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ y + x = 14 \end{cases} \Rightarrow x = 5; y = 9 \text{ e } z = 6$$

2. Reorganizando os termos do sistema linear:

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$$

O determinante é dado por:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$$

Se  $a \neq 1$ , temos  $D \neq 0$  e o sistema é possível e determinado, tendo, dessa forma, solução única independente do valor de  $m$ .

Se  $a = 1$ , temos o sistema: teremos  $x + z = 2$  (a partir das duas primeiras equações), logo  $m$  precisa ser igual a 2 para que o sistema admita solução.

3. Gabarito Oficial:

Sejam:

$x$  = número de atletas que marcaram 13 gols

$y$  = número de atletas que marcaram 14 gols

$z$  = número de atletas que marcaram 15 gols

Logo:

$$13x + 14y + 15z = 125$$

$$y + z = 5 \Rightarrow z = 5 - y \text{ e } 0 \leq y \leq 5$$

$$13x + 14y + 15(5 - y) = 125 \Rightarrow 13x + 14y + 75 - 15y = 125$$

$$\Rightarrow 13x - y = 50 \Rightarrow 13x - 50 = y$$

$$0 \leq y \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 13x - 50 \leq 5 \Rightarrow 50 \leq 13x \leq 55 \Rightarrow \frac{50}{13} \leq x \leq \frac{55}{13} \Rightarrow x = 4$$

Portanto:

$$y = 13x - 50 = 13 \times 4 - 50 = 2$$

$$z = 5 - y = 3$$

O número de atletas que fizeram 15 gols é igual a 3.

4.

$$a) 100 \times \overbrace{N_{100_p}}^x + 50 \times \overbrace{N_{50_M}}^x + 100 \times \overbrace{N_{100_M}}^y + 50 \times \overbrace{N_{50_p}}^y = 3.000.000$$

$$N_{100_p} = N_{50_M} \wedge N_{100_M} = N_{50_p}$$

$$\underbrace{N_{100_p}}_x + \underbrace{N_{50_M}}_x + \underbrace{N_{100_M}}_y + \underbrace{N_{50_p}}_y = N_T$$

$$150x + 150y = 3.000.000$$

$$2x + 2y = N_T \Rightarrow N_T = 2(x + y)$$

$$x + y = 20.000 \Rightarrow N_T = 40.000$$

b) Quantias iguais: 1.500.000 em cada mala

$$100 \times N_p = 1.500.000 \Rightarrow N_p = 15.000$$

$$N_p + N_M = N_T = 40.000$$

$$N_M = N_T - N_p = 40.000 - 15.000 \Rightarrow N_M = 25.000$$

5. Representando o valor de um suco por  $s$ , o de um hambúrguer por  $h$  e o da cocada por  $c$ , de acordo com as informações podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} s + h + c = 10 \\ s + 3h + 2c = 21,50 \\ 3s + 8h + 5c = 57 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda e subtraindo a terceira equação pelo triplo da primeira, temos:

$$\begin{cases} s + h + c = 10 \\ 2h + c = 11,50 \\ 5h + 2c = 27 \end{cases}$$

Subtraindo o dobro da segunda equação da terceira, temos:

$$\begin{cases} s + h + c = 10 \\ 2h + c = 11,50 \\ h = 4 \end{cases}$$

Substituindo h na segunda equação, temos:

$$8 + c = 11,50 \Rightarrow c = 3,50$$

E substituindo na primeira equação, temos:

$$4 + 3,50 + s = 10 \Rightarrow s = 2,50.$$