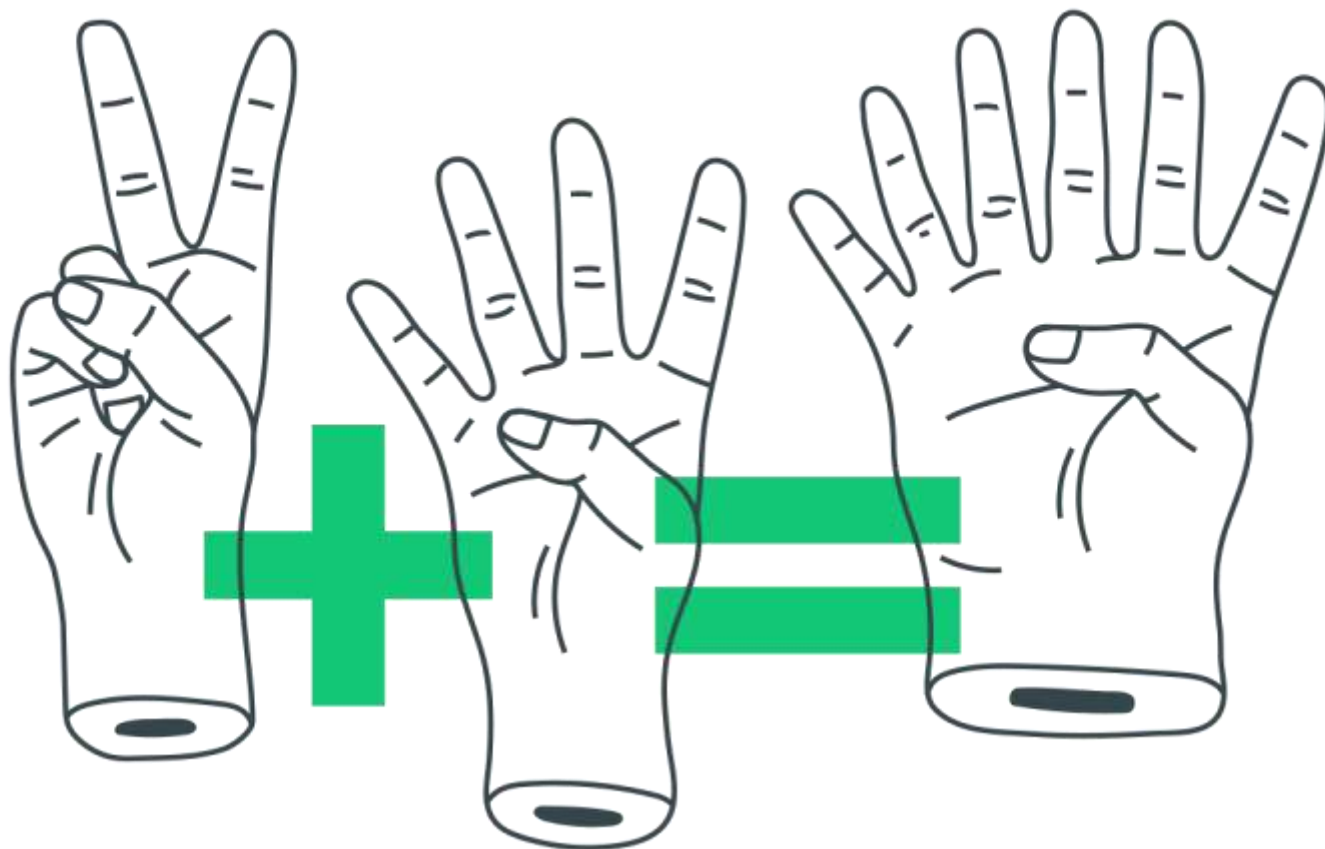
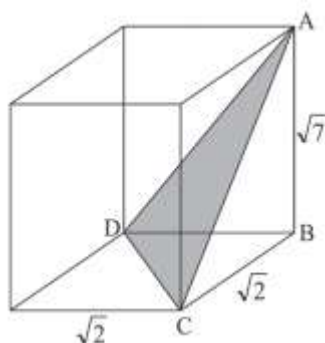


Geometria Espacial

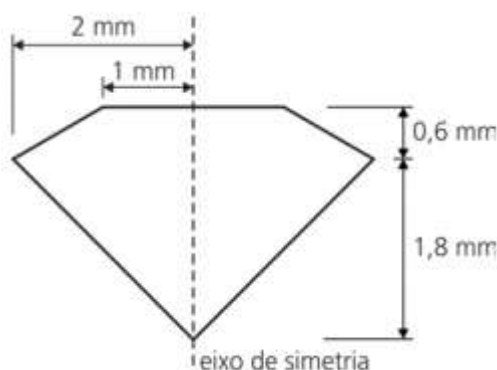


Geometria Espacial

1. A figura indica um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7}$, sendo A, B, C e D quatro de seus vértices. A distância de B até o plano que contém A, D e C é igual a:



2. Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.



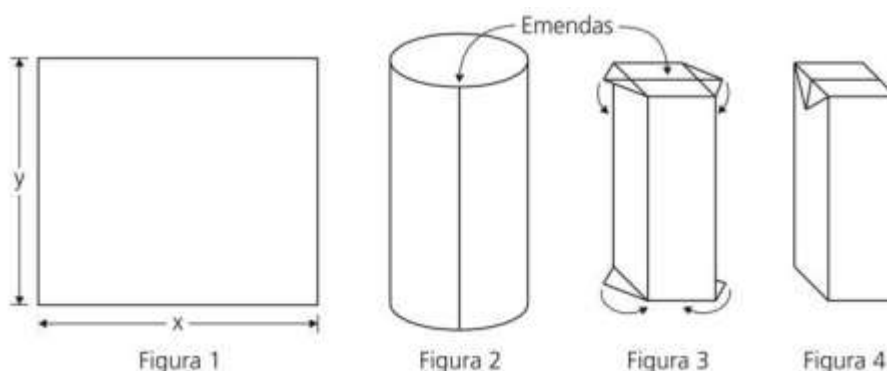
a) Em gemologia, um quilate é uma medida de massa, que corresponde a 200 mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente $3,5 \text{ g/cm}^3$, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.

b) A figura ao lado apresenta a seção transversal de um brilhante. Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.

Dica: o volume de um tronco de cone pode ser obtido empregando-se a fórmula

$$V = \frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2) \text{ em que } R \text{ e } r \text{ são os raios das bases e } h \text{ é a altura do tronco}$$

3. A caixa de um produto longa vida é produzida como mostra a sequência de figuras abaixo. A folha de papel da figura 1 é emendada na vertical, resultando no cilindro da figura 2. Em seguida, a caixa toma o formato desejado, e são feitas novas emendas, uma no topo e outra no fundo da caixa, como mostra a figura 3. Finalmente, as abas da caixa são dobradas, gerando o produto final, exibido na figura 4. Para simplificar, consideramos as emendas como linhas, ou seja, desprezamos a superposição do papel.



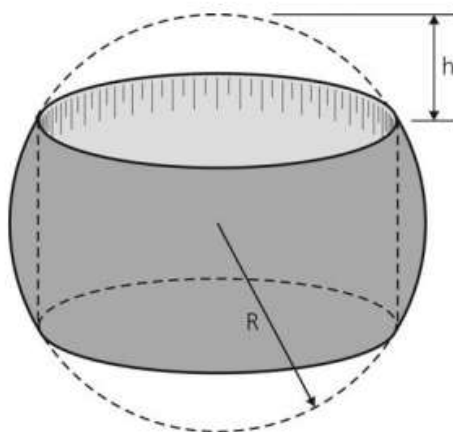
- a) Se a caixa final tem 20 cm de altura, 7,2 cm de largura e 7 cm de profundidade, determine as dimensões x e y da menor folha que pode ser usada na sua produção.
- b) Supondo, agora, que uma caixa tenha seção horizontal quadrada (ou seja, que sua profundidade seja igual a sua largura), escreva a fórmula do volume da caixa final em função das dimensões x e y da folha usada em sua produção.

4. Uma peça esférica de madeira maciça foi escavada, adquirindo o formato de anel, como mostra a figura seguinte. Observe que, na escavação, retirou-se um cilindro de madeira com duas tampas em formato de calota esférica. Sabe-se que uma calota esférica tem volume

$$V_{cal} = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h) \text{ em que } h \text{ é a altura da calota e } R \text{ é o raio da esfera. Além disso, a área da}$$

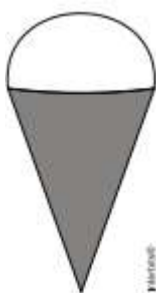
superfície da calota esférica (excluindo a porção plana da base) é dada por $A_{cal} = 2\pi Rh$.

Atenção: não use um valor aproximado para π .



- a) Supondo que $h = R/2$, determine o volume do anel de madeira, em função de R .
b) Depois de escavada, a peça de madeira receberá uma camada de verniz, tanto na parte externa, como na interna. Supondo, novamente, que $h = R/2$, determine a área sobre a qual o verniz será aplicado.

5. A figura representa um sorvete de casquinha, no qual todo o volume interno está preenchido por sorvete e a parte externa apresenta um volume de meia bola de sorvete.



Considerando que o cone tem 12 cm de altura e raio 6 cm, então o volume total de sorvete é

Gabarito

1. Seja M o ponto médio de CD. Traçando o segmento BM ele será metade da diagonal BE que vale 2 logo $BM=1$. Traçando o segmento AM temos um triângulo retângulo ABM. Por Pitágoras $(AM)^2 = 1^2 + (\sqrt{7})^2 \Rightarrow AM=2\sqrt{2}$. Seja P um ponto na reta AM, logo o segmento BP é a distância do ponto B ao plano e perpendicular. Logo fazendo semelhança entre o triângulo ABM com BPM temos que $\frac{AM}{AB} = \frac{BP}{BM} \Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot BP = \sqrt{7} \cdot 1 \Rightarrow BP = \frac{\sqrt{14}}{4}$

2. a) Se 1 quilate corresponde a 200 mg, então 0,7 quilate corresponde a $0,7 \cdot 200 = 140 \text{ mg} =$

0,14 g. Como cada cm^3 de diamante tem 3,5 g, podemos escrever $\frac{3,5 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = \frac{0,14 \text{ g}}{x}$, donde $3,5x = 0,14$, ou $x = 0,14/3,5 = 0,04 \text{ cm}^3$.

b) A parte superior do brilhante é um tronco de cone com $R = 2 \text{ mm}$, $r = 1 \text{ mm}$ e $h = 0,6$

$$V_T = \frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi}{3} 0,6 (2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) = 1,4\pi \text{ mm}^3.$$

mm. Logo, seu volume é

A parte inferior do brilhante é um cone com 1,8 mm de altura e raio da base igual a 2 mm.

$$V_C = \frac{\pi}{3} h R^2 = \frac{\pi}{3} 1,8 \cdot 2^2 = 2,4\pi \text{ mm}^3.$$

Assim, o volume da parte inferior é dado é

Totalizando $3,8\pi$.

3. a) Como desprezamos as emendas, o valor de x corresponde ao perímetro do retângulo da base da caixa. Assim, $x = 2 \cdot 7,2 + 2 \cdot 7 = 28,4 \text{ cm}$. Já o valor de y é dado pela soma da altura da caixa com o dobro da metade da menor dimensão de sua base, ou seja, $y = 20 + 2 \cdot (7/2) = 27 \text{ cm}$.
- b) Como a caixa tem seção quadrada, o lado de sua base mede $x/4$. Além disso, a altura da caixa mede $y - 2 \cdot (x/4)/2 = y - x/4$. Logo, o volume da caixa é dado por $V = (x/4)^2 (y - x/4)$, ou $V = (4x^2y - x^3)/64$.

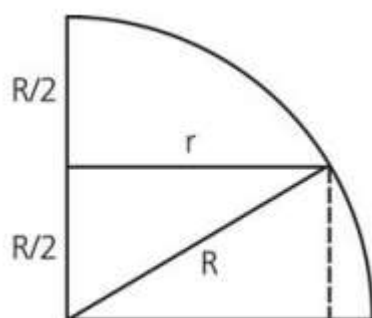
4. a)

O volume do anel é dado por $V_a = V_e - 2V_{cal} - V_{cil}$, em que o volume da esfera é $V_e = 4\pi R^3/3$, o volume do cilindro é $V_{cil} = \pi r^2(2R - 2h)$ e o volume da calota, V_{cal} , é dado no enunciado da questão.

Da figura ao lado, concluímos que $r^2 = R^2 - (R/2)^2 = 3R^2/4$. Assim, $V_{cil} = \pi \cdot (3R^2/4) \cdot (2R - 2R/2) = 3\pi R^3/4$.

Já a calota tem volume $V_{cal} = \frac{\pi(R/2)^2}{3} \left(3R - \frac{R}{2} \right) = \frac{5\pi R^3}{24}$.

Logo, $V_a = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{5\pi R^3}{12} - \frac{3\pi R^3}{4} = \frac{2\pi R^3}{12} = \frac{\pi R^3}{6}$.



b)

A área da superfície do anel é dada por $A_a = A_e - 2A_{cal} + A_{cil}$, em que $A_e = 4\pi R^2$, $A_{cil} = 2\pi r(2R - 2h)$ e A_{cal} é dada no enunciado da questão. Como $r = R\sqrt{3}/2$ e $h = R/2$, temos $A_{cil} = \pi R^2\sqrt{3}$.

Além disso, $A_{cal} = \pi R^2$. Logo, $A_a = 4\pi R^2 - 2\pi R^2 + \pi R^2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})\pi R^2$.

5. O volume total de sorvete é dado pela soma do volume da semiesfera de raio 6cm com o

volume da casquinha, ou seja, $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 144\pi + 144\pi = 288\pi \text{ cm}^3$