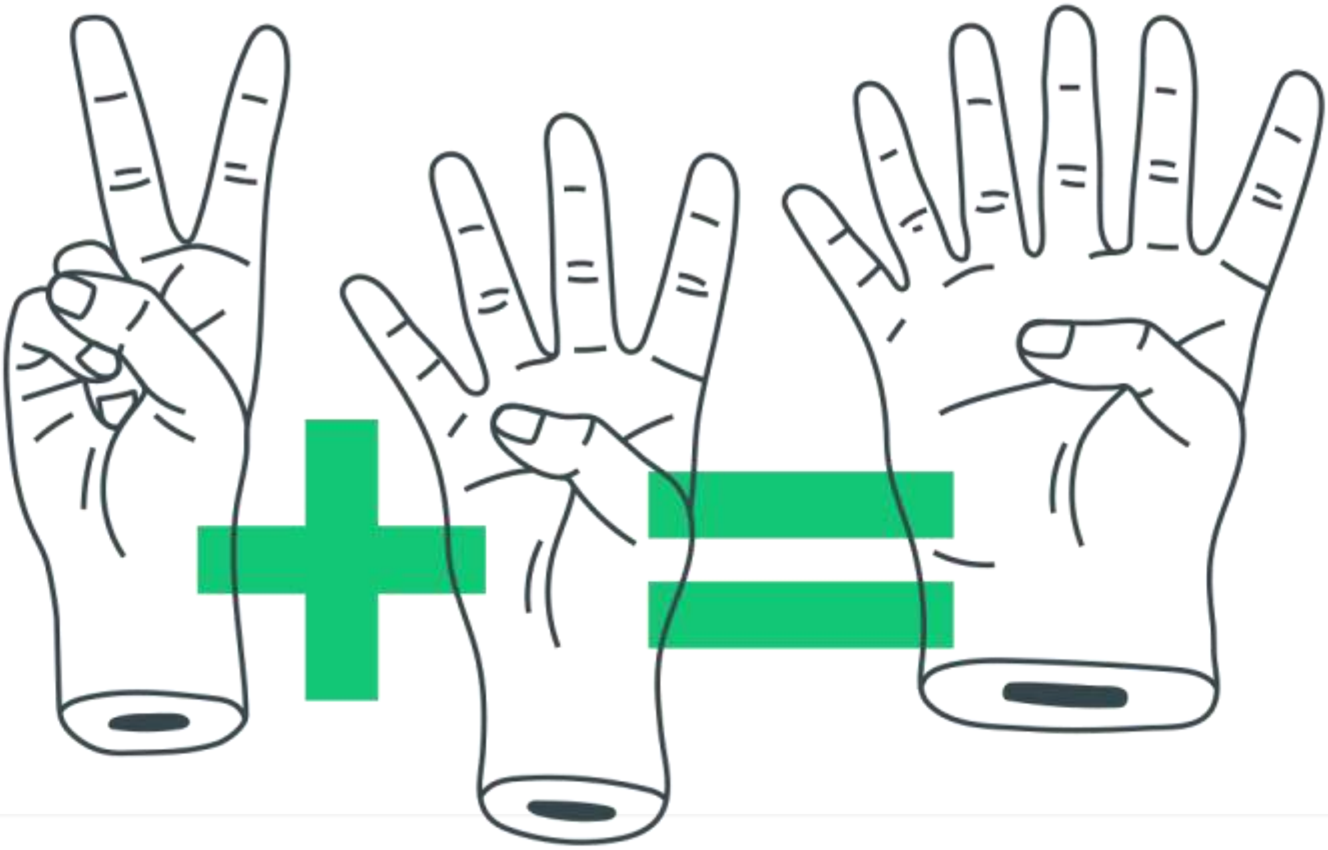
AULA
AO VIVO

Matemática

Alex Amaral
(Allan Pinho)
15.12.2016

Geometria Analítica: Vetores



Geometria Analítica: Vetores

1. Seja ax + by + cz + d = 0 a equação do plano que passa pelos pontos (4, – 2, 2) e (1, 1, 5) e é perpendicular ao plano 3x – 2y + 5z – 1 = 0. Calcule a razão d/b.

2. Considere r e s retas no R³ definidas por:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \text{ e } s: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Se θ é o ângulo formado pelas retas r e s, então, quanto vale cossec(θ)?

3. Considere:

a) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ vetores não nulos no $\mathbb{R}^3$.

b) A matriz $[v_{ij}]$ que descreve o produto escalar de v_i por v_j, $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 4$ e que é dada abaixo:

$$[v_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 2 & -1 & 2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 3 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}.$$

c) O triângulo PQR onde $\overrightarrow{QP} = \vec{v}_2$ e $\overrightarrow{QR} = \vec{v}_3$.

Qual o volume do prisma, cuja base é o triângulo PQR e a altura h igual a duas unidades de comprimento?

4. Um paralelepípedo retângulo tem dimensões x, y e z, expressas em unidades de comprimento e nessa ordem, formam uma P.G. de razão 2.Sabendo que a área total do

paralelepípedo mede 252 unidades de área, qual o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ = (x-2, y-2, z-4) e $\vec{w}$ = (3,-2,1)?

5. Considere $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ vetores do R³ que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(2,-1,-2) \\ \vec{x}+2\vec{y}+3\vec{z}=(5,-2,-8) \\ \vec{x}+4\vec{y}+9\vec{z}=(15,-6,-24) \end{cases}$$

Quanto vale o produto $\vec{x}\cdot\vec{y}\times\vec{z}$?

Gabarito

1. Sejam u e v os vetores normais dos planos:
   u = (a, b, c) e v = (3, -2, 5)
   É nos dito que os dois vetores são perpendiculares, logo seu produto escalar é zero.
   3a – 2b + 5c = 0 → 5c = 2b – 3a ...(I)
   Utilizando os pontos dados no respectivo plano temos:
   4a – 2b + 2c + d = 0 ... (II)
   a + b + 5c + d = 0 ... (III)
   Para resolver esse sistema vamos substituir (I) em (III). Isso nos dará a seguinte relação:
   2a = 3b + d ...(IV)
   Por fim, usando as relações (I), (II) e (IV) em conjunto teremos:
   15b + 12d = 0 → d/b = -5/4

2.

$$\begin{cases} x+y=z-1 \\ 2x-y=-z \end{cases} \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \ \wedge \ y=2x+z \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}+z$$

Escrevendo a equação da reta s na forma paramétrica, temos: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{2}{3}+t, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$

O vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2,-1,3)$ e o vetor diretor da reta s é $\vec{s}(0,1,1)$.

Seja θ o ângulo entre as retas r e s, então

$$\vec{r}\cdot\vec{s}=|\vec{r}||\vec{s}|\cos\theta \Leftrightarrow 2\cdot 0+(-1)\cdot 1+3\cdot 1=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta=1-\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{6}{7}$$

Assumindo que θ é o menor ângulo entre as retas, então $0\le\theta\le\pi$ e $\operatorname{sen}\theta\ge 0$.

Portanto, temos: $\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \operatorname{cossec}\theta=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{42}}{6}$.

3.

$$v_{22}=\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2=|\vec{v}_2|^2=2\Rightarrow|\vec{v}_2|=\sqrt{2}$$

$$v_{33}=\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3=|\vec{v}_3|^2=3\Rightarrow|\vec{v}_3|=\sqrt{3}$$

$$v_{23}=\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3=|\vec{v}_2||\vec{v}_3|\cos\theta=-1\Leftrightarrow\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\theta=-1\Leftrightarrow\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}|\vec{v}_2||\vec{v}_3|\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$V_{PRISMA}=S_{PQR}\cdot h=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 2=\sqrt{5}\text{ u.v.}$$

4.

$PG: x, y, z$ de razão 2 $\Rightarrow y=2x \wedge z=4x$

$$S_{TOTAL}=2(xy+xz+yz)=2\left(2x^2+4x^2+8x^2\right)=28x^2=252\Leftrightarrow x=3$$

Logo, $\vec{u}=(x-2,y-2,z-4)=(1,4,8)$ e $\vec{w}=(3,-2,1)$.

Sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, temos:

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}=\frac{(1,4,8)\cdot(3,-2,1)}{\sqrt{1+16+64}\sqrt{9+4+1}}=\frac{3-\cancel{8}+\cancel{8}}{9\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{42}\Rightarrow\theta=\arccos\frac{\sqrt{14}}{42}$$

5.

$$\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(2,\ 1,\ 2)\\ \vec{x}+2\vec{y}+3\vec{z}=(5,\ 2,\ 8)\\ \vec{x}+4\vec{y}+9\vec{z}=(15,-6,-24)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(2,\ 1,\ 2)\\ \vec{y}+2\vec{z}=(3,\ 1,\ 6)\\ 3\vec{y}+8\vec{z}=(13,-5,-22)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(2,\ 1,\ 2)\\ \vec{y}+2\vec{z}=(3,\ 1,\ 6)\\ \vec{z}=(2,-1,-2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\vec{x}=(1,-1,2);\ \vec{y}=(-1,1,-2);\ \vec{z}=(2,-1,-2)$$

O produto pedido é o produto misto dos três vetores, então $\vec{x}\cdot\vec{y}\times\vec{z}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-1&-2\end{vmatrix}=0$.