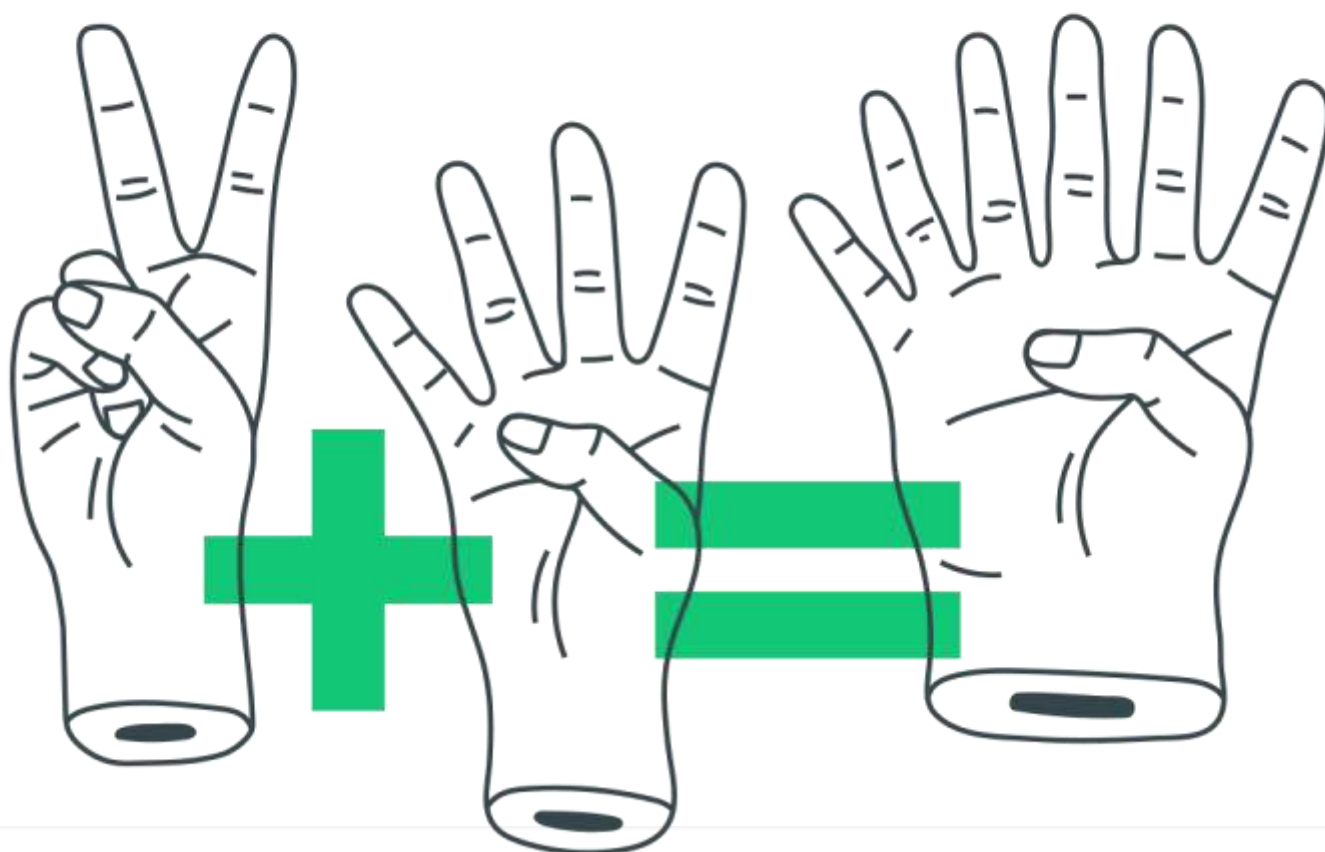


# Geometria Analítica: Cônicas



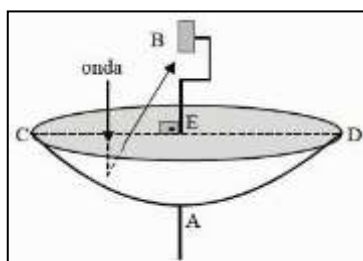
## Geometria Analítica: Cônicas

1. No plano cartesiano, um círculo de centro  $P(a, b)$  tangencia as retas de equações  $y = x$  e  $x = 0$ . Se  $P$  pertence à parábola de equação  $y = x^2$  e  $a > 0$ , qual a ordenada  $b$  do ponto  $P$ ?

2. A elipse  $x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4}$  e a reta  $y = 2x + 1$ , do plano cartesiano, se interceptam nos pontos  $A$  e  $B$ . Determine as coordenadas do ponto médio de  $\overline{AB}$ .

3. Determine a equação da reta que passa pelo ponto  $(0,0)$  e é tangente à parábola de equação  $y = x^2 + 4$ .

4. A superfície de uma antena parabólica pode ser gerada pela rotação completa de uma parábola ao redor do seu eixo. A intersecção dessa superfície com qualquer plano perpendicular ao eixo é um círculo.



Considere um círculo de centro  $E$  e diâmetro  $CD$  de 4 metros de comprimento, cuja medida da distância do centro  $E$  ao vértice  $A$  do paraboloide é 0,5 metro.

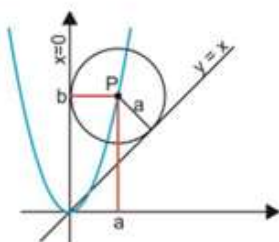
a) Escreva a equação cartesiana da parábola de foco  $B$  contida no plano  $CAD$ , sendo o vértice  $(A)$  a origem do sistema cartesiano e o eixo das abscissas paralelo ao diâmetro  $CD$  como mostra a figura.

b) Calcule a distância do vértice  $A$  ao foco  $B$ .

5. Um holofote situado na posição  $(-5,0)$  ilumina uma região elíptica de contorno  $x^2 + 4y^2 = 5$ , projetando sua sombra numa parede representada pela reta  $x = 3$ , conforme ilustra a figura. Considerando o metro a unidade dos eixos, qual o comprimento da sombra projetada?

## Gabarito

1.



Como o círculo de centro  $P(a, b)$  tangencia as retas de equações  $y = x$  e  $x = 0$ , a distância de  $P$  a essas duas retas são iguais à medida do raio.

Se  $P$  pertence à parábola de equação  $y = x^2$ ,  $P(x, x^2)$ , isto é,  $a = x$  e  $b = x^2 \Rightarrow P(a, a^2)$

Determinando-se agora a distância do ponto  $P(a, a^2)$  à reta  $y = x$ , isto é, à reta  $y - x = 0$ :

$$\frac{|a^2 - a|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = a \Rightarrow \frac{|a^2 - a|}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow |a^2 - a| = \sqrt{2}a \Rightarrow a^2 - a = \sqrt{2}a \text{ ou } a^2 - a = -\sqrt{2}a \Rightarrow$$

$$a^2 - a - \sqrt{2}a = 0 \text{ ou } a^2 - a + \sqrt{2}a = 0 \Rightarrow a(a - 1 - \sqrt{2}) = 0 \text{ ou } a(a - 1 + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$$

$$a - 1 - \sqrt{2} = 0 \text{ ou } a - 1 + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } a = 1 - \sqrt{2}.$$

$$\text{Como } a > 0 \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b = (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow b = 3 + 2\sqrt{2}$$

2.

$$i) \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{(2x+1)^2}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow 4x^2 + 2(4x^2 + 4x + 1) = 9 \Rightarrow 4x^2 + 8x^2 + 8x + 2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2 + 8x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(12)(-7)}}{24} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{24} = \frac{-8 \pm \sqrt{400}}{24} = \frac{-8 \pm 20}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-8-20}{24} = \frac{-28}{24} = \frac{-7}{6} \rightarrow y = 2\left(\frac{-7}{6}\right) + 1 = \frac{-7}{3} + 1 = \frac{-7+3}{3} = -\frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{-8+20}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \left(\frac{-7}{6}, -\frac{4}{3}\right) \\ B = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \end{cases}$$

$$ii) \text{ Ponto Médio: } \left(\frac{\frac{-7}{6} + \frac{1}{2}}{2}, \frac{-\frac{4}{3} + 2}{2}\right) = \left(\frac{\frac{-7+3}{6}}{2}, \frac{\frac{-4+6}{3}}{2}\right) = \left(\frac{\frac{-4}{6}}{2}, \frac{\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(-\frac{4}{12}, \frac{2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

3. Uma reta que passa por (0,0) tem equação da forma  $y = mx$ . Encontrando a interseção, temos:

$$i) \begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow mx = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 - mx + 4 = 0$$

$$ii) \text{Tangente: } \Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4) = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \end{cases}$$

$$iii) \text{ retas: } \begin{cases} y = 4x \\ \text{ou} \\ y = -4x \end{cases}$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} a_{100} = 1 + \frac{(2 + b_{100-1}) \cdot (100 - 1)}{2} = 1 + \frac{(2 + b_{99}) \cdot 99}{2} \\ b_{99} = 2 + (99 - 1) \cdot 1 = 2 + 98 = 100 \end{cases} \Rightarrow a_{100} = 1 + \frac{(2 + 100) \cdot 99}{2} = 1 + \frac{(102) \cdot 99}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 1 + (51) \cdot (99) = 1 + 5049 = 5050$$

4. a) As coordenadas do vértice são: (0,0). A concavidade é para cima. A parábola tem equação:  $x^2 = 2py$ . O ponto D(2,1/2) pertence à parábola. Temos:

$$i) \begin{cases} x^2 = 2py \\ \left(2, \frac{1}{2}\right) \in \text{Parábola} \end{cases} \Rightarrow (2)^2 = 2p \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4 = p$$

$$ii) \text{Equação: } x^2 = 2(4)y \Rightarrow x^2 = 8y \text{ ou } y = \frac{1}{8}x^2$$

- b) A distância do vértice ao foco vale a metade do parâmetro. Logo, distância vale 2m.

5. O ponto T(x0,y0) pertence à elipse e à reta de equação  $y = ax + b$ . O ponto (-5,0) pertence à reta.  
Logo,  $0 = -5a + b \Rightarrow b = 5a$ . A equação da reta é  $y = ax + 5a$ . Resolvendo o sistema e igualando o discriminante da equação encontrada à zero (tangente), temos:

$$\begin{cases} y = ax_0 + 5a \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + 4(ax_0 + 5a)^2 = 5 \Rightarrow x_0^2 + 4(a^2x_0^2 + 10a^2x_0 + 25a^2) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 + 4a^2x_0^2 + 40a^2x_0 + 100a^2 - 5 = 0 \Rightarrow (1 + 4a^2)x_0^2 + 40a^2x_0 + 100a^2 - 5 = 0$$

$$\Delta = (40a^2)^2 - 4(1 + 4a^2)(100a^2 - 5) = 1600a^4 - 4(100a^2 - 5 + 400a^2 - 20a^2) = -320a^2 - 20$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow -320a^2 - 20 = 0 \Rightarrow a^2 = \sqrt{\frac{1}{16}} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

$$\text{Equação(reta): } \begin{cases} y = \frac{x}{4} + \frac{5}{4} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y' = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \\ y = -\frac{x}{4} - \frac{5}{4} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y' = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -2 \end{cases} \Rightarrow d = y' - (-y') = 2 - (-2) = 4$$