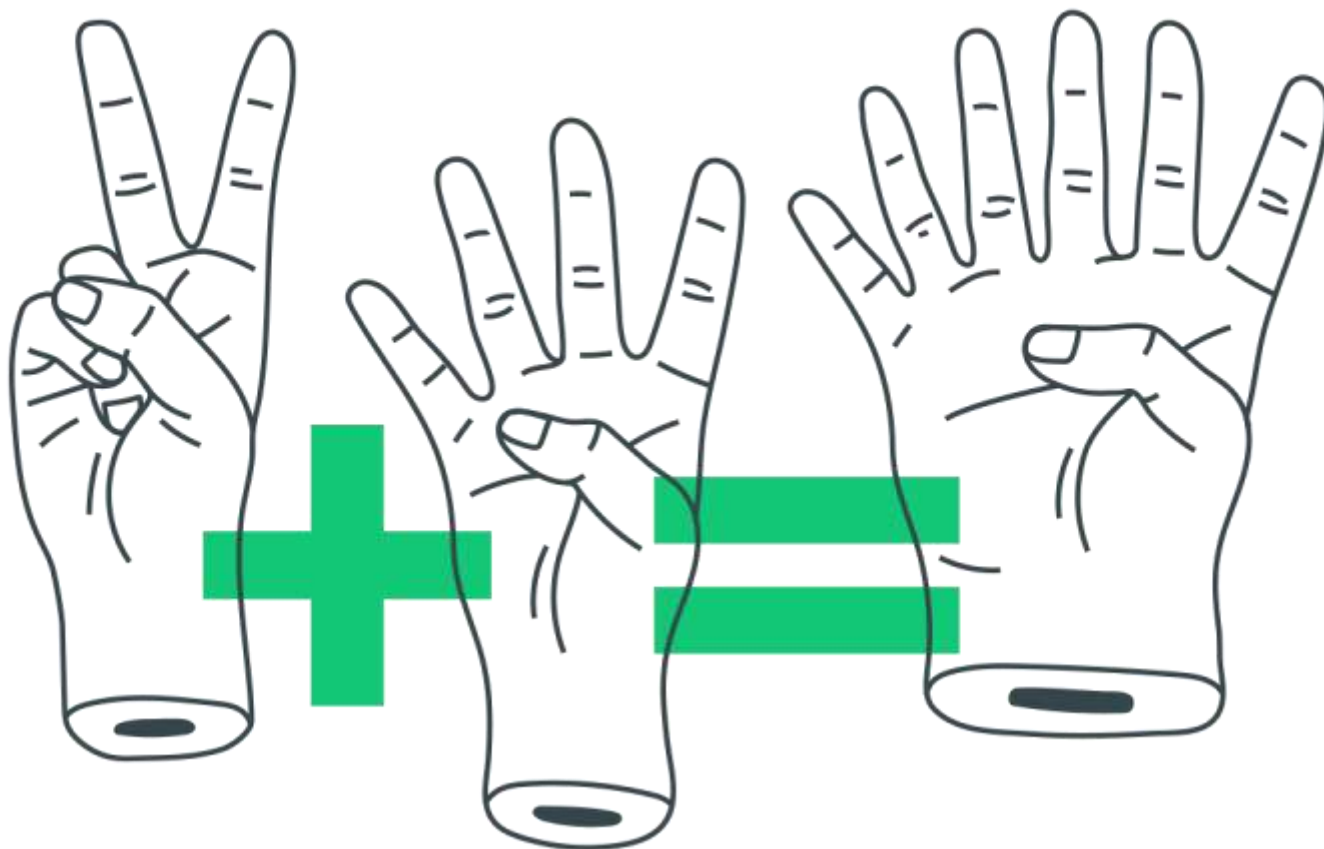


Trigonometria: Equações e Inequações



Trigonometria: Equações e Inequações

1. O dobro do seno de um ângulo α onde temos $0 < \alpha < \pi/2$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, qual o valor do seu cosseno?
2. Se $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ e α for pertencente ao 4º Quadrante, qual será o valor da expressão $y = \sqrt{5} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 7 \cdot \tan(2 \cdot \alpha)$?
3. Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\sin(x)\cos(x) = 2/5$. Então, determine o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\tan(x)$.
4. Determine os valores de a , $0 < a < \pi$ e $a \neq \pi/2$, para os quais a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x^2 - 4x - \tan(a)$ assume seu valor mínimo igual a -4.
5. Considere a matriz $A_{3 \times 3}$ abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & 1 \\ a_{31} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada elemento desta matriz é expresso pela seguinte relação:

$$a_{ij} = 2 \times (\sin \theta_i) \times (\cos \theta_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Nessa relação, os arcos θ_1 , θ_2 e θ_3 são positivos e menores que $\frac{\pi}{3}$ radianos. Calcule o valor numérico do determinante da matriz A.

Gabarito

1. Pelo enunciado temos:

$$2\text{sen}(\alpha) = 3\text{tg}^2(\alpha)$$

Sabendo que $\text{tg}(\alpha) = \text{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$, substituímos e chegamos a

$$2\text{sen}(\alpha) = 3\text{sen}^2(\alpha)/\cos^2(\alpha)$$

$$3\text{sen}^2(\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha)$$

$$3\text{sen}(\alpha) = 2\cos^2(\alpha)$$

Se, pela relação fundamental, $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, então $\cos^2(\alpha) = 1 - \text{sen}^2(\alpha)$. Então, substituindo e fazendo $x = \text{sen}(\alpha)$:

$$3\text{sen}(\alpha) = 2 - 2\text{sen}^2(\alpha)$$

$$3x = 2 - 2x^2$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \{-2, 1/2\}$$

Como $x = \text{sen}(\alpha)$, o único valor válido é $x = 1/2$. Agora que sabemos o valor de $\text{sen}(\alpha)$, usamos esse valor na equação que achamos anteriormente:

$$3\text{sen}(\alpha) = 2\cos^2(\alpha)$$

$$3/2 = 2\cos^2(\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha) = 3/4$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{3}/2$$

2. Utilizando a equivalência fundamental da trigonometria, $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
Podemos calcular o valor de $\cos \alpha$:

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

Sabendo que α está no quarto quadrante, então o cosseno é positivo e vale 3/5.

Sabendo que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ temos que $\tan \alpha = -4/3$

Agora iremos utilizar as seguintes fórmulas:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

podemos fazer uma transformação nestas fórmulas e utilizá-las da seguinte maneira:

$$\sin \alpha = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (2)$$

estas transformações são válidas, pois a fórmula diz que o seno do dobro de um arco é igual à duas vezes o seno deste arco vezes o cosseno deste arco. Vamos tomar nosso arco como sendo $x/2$, portanto o dobro deste arco será x . O mesmo vale para o cosseno.

Na equação (2) vamos isolar o valor de $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e substituir o valor de $\cos x$ que já sabemos:

$$\cos \alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{3}{5} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{5}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{5}}$$

Veja que a raiz trouxe duas opções, ou + ou -, qual iremos utilizar? Como o ângulo é do quarto quadrante, a metade deste ângulo será do segundo quadrante, portanto terá seno positivo, vale o +.

Agora que já sabemos este valor, vamos substituí-lo na equação (1)

$$\sin \alpha = 2 \cdot \left(\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{5}} \right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Para calcular melhor esta equação, vamos elevar os dois lados da equação ao quadrado. O valor de $\sin x$ já sabemos, podemos substituí-lo.

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \left[2 \cdot \left(\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{5}} \right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]^2$$

$$\frac{16}{25} = 4 \cdot \left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{5} \right] \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{4}{25} = \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{5}$$

Para facilitar os cálculos daqui para frente, vamos chamar o $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = Y$, ou seja:

$$\frac{4}{25} = Y^2 - \frac{3Y}{5}$$

$$25 \cdot Y^2 - 15Y - 4 = 0$$

Aplicando Bhaskara, achamos como raízes:

$$Y' = 4/5$$

$$Y'' = -1/5$$

Como $Y = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ou seja, é um número elevado ao quadrado, não pode ter como resposta um valor negativo, portanto, o único valor que Y pode admitir é 4/5:

$$\frac{4}{5} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Como $\alpha/2$ está no segundo quadrante, seu cosseno será negativo, portanto, vale a raiz negativa.

Pronto, achamos o valor de $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Agora só nos falta achar o valor de $\tan(2 \cdot \alpha)$, utilizaremos a fórmula:

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}}$$

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \left(-\frac{8}{3}\right) \times \left(-\frac{9}{7}\right)$$

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{24}{7}$$

Pronto, já temos todas as informações pedidas, agora é só substituir na fórmula pedida.

$$y = \sqrt{5} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 7 \cdot \tan(2 \cdot \alpha)$$

$$y = \sqrt{5} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 7 \times \frac{24}{7}$$

$$y = -26$$

3. $\sin(x)\cos(x) = 2/5$

Dividimos todo mundo por $\cos^2(x)$, pois surge uma tangente e uma secante ao quadrado que podemos transformar em tangente depois, vejamos como fazemos aparecer o que buscamos:

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2/5}{\cos^2(x)} \quad \sin(x)\cos(x) = \cos^2(x)$$

$$\text{tg}(x) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\text{tg}(x) = \frac{2}{5} \sec^2(x)$$

A identidade trigonométrica diz que:

$$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$$

$$\text{tg}(x) = 2/5 [1 + \text{tg}^2(x)]$$

$$\text{tg}(x) = 2/5 + 2/5 \text{tg}^2(x)$$

$$- 2/5 \text{tg}^2(x) + \text{tg}(x) - 2/5 = 0$$

Caímos numa equação do 2º grau, cuja incógnita é $\text{tg}(x)$ fazendo a soma e o produto em função de $\text{tg}(x)$ chegamos em:

$$\text{Soma} = 5/2 \quad \text{Produto: } 1$$

4. Usando a coordenada y do vértice, temos:

$$\frac{-\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow \frac{-(16 + 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha)}{16} = -4$$

$$\frac{-16 - 16 \operatorname{tg}^2 \alpha}{16} = -4$$

$$-1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = -4$$

$$-\operatorname{tg}^2 \alpha = -4 + 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$$

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{3}$$

De acordo com o intervalo $0 < \alpha < \pi$, temos a seguinte solução: $\{\pi/3, 2\pi/3\}$.

5. Observando-se os elementos da diagonal principal da matriz, juntamente com a relação que os define, conclui-se que:

$$a_{22} = a_{33} = 1 = 2 \operatorname{sen} \vartheta_2 \cos \vartheta_2 = 2 \operatorname{sen} \vartheta_3 \cos \vartheta_3$$

$$\operatorname{sen} (2\vartheta_2) = \operatorname{sen} (2\vartheta_3) = 1$$

Ou seja:

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 = 45^\circ$$

Desse modo, a matriz apresenta duas colunas iguais e, conseqüentemente, seu determinante é 0.