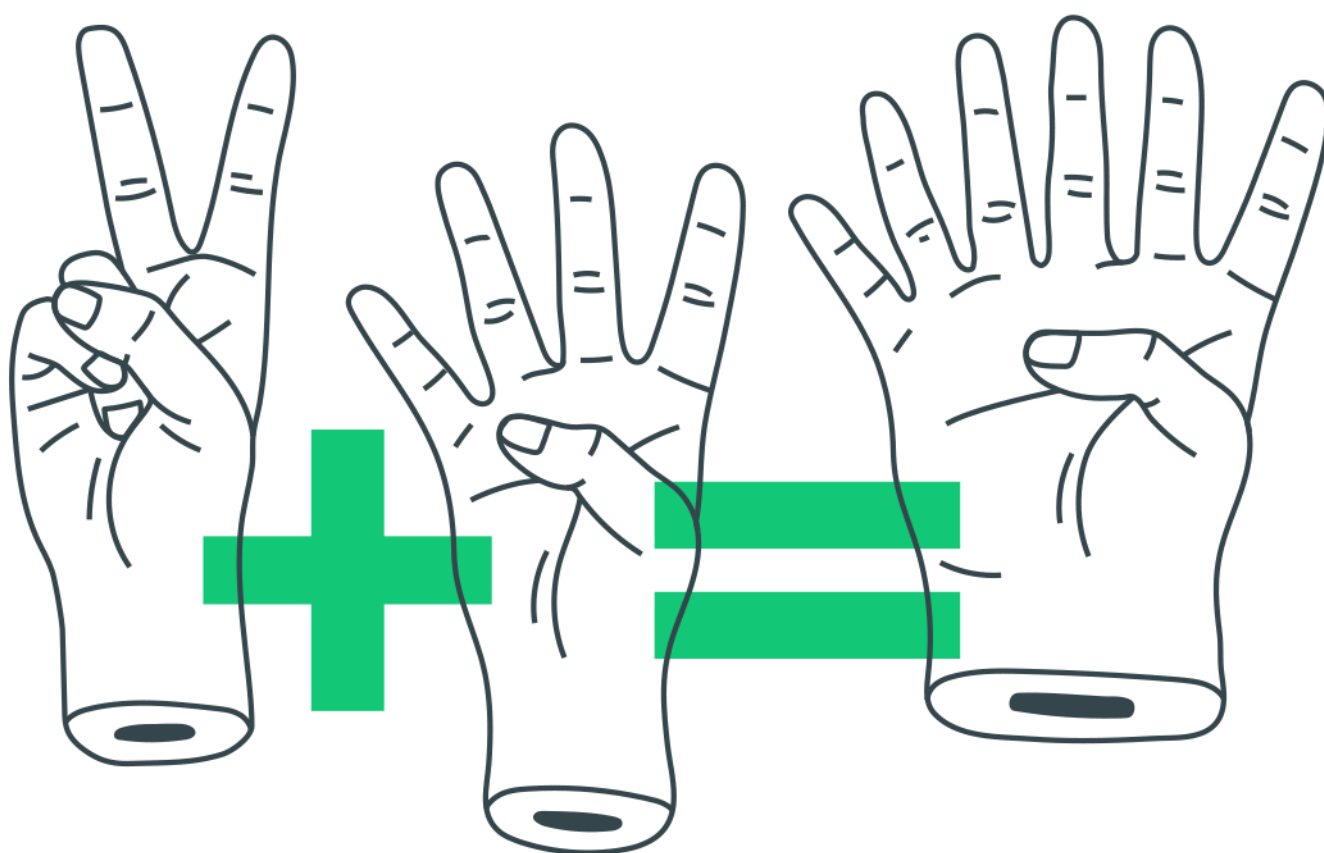


Polinômios II



Polinômios II

1. Seja $P(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$, com coeficientes reais. Sabendo que $P(3 + i) = 2 - 4i$, onde $i^2 = -1$, calcule $P(3 - i)$
2. Seja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Para que valores de x se tem $p(x) \geq 0$? Justifique.
3. Sejam a, b, c e d constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a -5 , determine o valor de $a + b + c + d$.
4. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$. Determine o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ que tem raízes x_1x_2, x_1x_3 e x_2x_3 e indique o valor do produto abc .
5. Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que d é uma constante real. Para qual valor de d a equação admite uma raiz dupla no intervalo $]0,1[$?

Gabarito

1. $2 + 4i$

SOLUÇÃO:

$$P(3+i) = 2 - 4i \rightarrow 3+i = t \Rightarrow i = t-3 \Leftrightarrow P(t) = 2 - 4 \cdot (t-3) \Rightarrow P(t) = 2 - 4t + 12 \Rightarrow P(t) = -4t + 14$$

$$\text{Substituindo } t \text{ por } 3-i, \text{ temos: } P(3-i) = -4(3-i) + 14 \Rightarrow P(3-i) = -12 + 4i + 14 \Rightarrow P(3-i) = 2 + 4i.$$

2. $x \in [1, 2] \cup [3, +\infty[$

SOLUÇÃO:

Seja $p(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$, temos que o coeficiente do termo de maior grau é positivo, visto que os coeficientes de x são todos iguais a 1, e que as raízes do polinômio são 1, 2 e 3, assim, fazendo o estudo dos sinais, sabemos que ele será negativo quando $x < 1$ e quando $2 < x < 3$ e será positivo nos intervalos $[1, 2]$ e $[3, +\infty)$.

3. $a + b + c + d = 21$

SOLUÇÃO:

Efetuando as divisões:

$ \begin{array}{r} \cancel{x^4} + 0x^3 \quad + ax^2 \quad + 0x \quad + b \\ \underline{-\cancel{x^4} - 2x^3 \quad - 4x^2} \\ -2\cancel{x^3} + (a-4)x^2 \quad + 0x \quad + b \\ \underline{+ 2x^3 \quad + 4x^2 \quad + 8x} \\ \quad + a\cancel{x^2} \quad + 8x \quad + b \\ \quad \underline{- a\cancel{x^2} \quad - 2ax \quad - 4a} \\ \quad \quad R_1(x) = +(8-2a) \cdot x + b - 4a \end{array} $	$ \begin{array}{r} \cancel{x^3} \quad + cx^2 \quad + dx \quad - 3 \\ \underline{-\cancel{x^3} \quad + x^2 \quad - 2x} \\ \quad + (c+1) \cdot x^2 \quad + (d-2) \cdot x \quad - 3 \\ \quad \underline{-(c+1) \cdot x^2 \quad + (c+1) \cdot x \quad - 2c-2} \\ \quad \quad R_2(x) = +(c+d-1) \cdot x - 2c-2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - x + 2 \\ \underline{x + c + 1} \end{array} $
--	---	--

O resto da primeira divisão é igual a zero e da segunda é igual a $a-5$, portanto, temos o sistema:

$$\begin{cases}
 R_1(x) = +(8-2a) \cdot x + b - 4a = 0 & \begin{cases} 8-2a=0 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=\frac{8}{2} \Leftrightarrow a=4 \\ b-4a=0 \Rightarrow b=4a \Rightarrow b=4 \cdot 4 \Leftrightarrow b=16 \end{cases} \\
 R_2(x) = +(c+d-1) \cdot x - 2c-2 = a-5 & \begin{cases} -2c-2=a-5 \Rightarrow -2c-2=4-5 \Rightarrow 2c+2=1 \Rightarrow 2c=-1 \Leftrightarrow c=-\frac{1}{2} \Rightarrow a+b+c+d=4+16-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=21 \\ c+d-1=0 \Rightarrow d=1-c \Rightarrow d=1-\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow d=1+\frac{1}{2} \Leftrightarrow d=\frac{3}{2} \end{cases}
 \end{cases}$$

4. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$. $abc = 18$.

SOLUÇÃO:

Lembre-se que dado um polinômio $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3 , sabemos que:

$$\begin{cases} (i) & x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A} \\ (ii) & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A} \\ (iii) & x_1x_2x_3 = -\frac{D}{A} \end{cases}$$

Assim, no caso do polinômio dado por $x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2 e x_3 . Sabemos que:

$$\begin{cases} (i) & x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(-6)}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ (ii) & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{3}{1} \Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 \\ (iii) & x_1x_2x_3 = -\frac{(-1)}{1} \Rightarrow x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

$x^3 + ax^2 + bx + c$ tem raízes x_1x_2, x_1x_3 e x_2x_3 . Logo:

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{a}{1} = -a \Rightarrow (ii) = -a \Rightarrow 3 = -a \Leftrightarrow \boxed{a = -3} \\ x_1x_2 \cdot x_1x_3 + x_1x_2 \cdot x_2x_3 + x_1x_3 \cdot x_2x_3 = x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 = x_1x_2x_3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{b}{1} = b \Rightarrow (iii) \cdot (i) = b \Rightarrow 1 \cdot 6 = b \Leftrightarrow \boxed{b = 6} \\ x_1x_2 \cdot x_1x_3 \cdot x_2x_3 = x_1^2x_2^2x_3^2 = (x_1x_2x_3)^2 = \frac{c}{1} = -c \Rightarrow (iii)^2 = -c \Rightarrow 1^2 = -c \Leftrightarrow \boxed{c = -1} \end{cases}$$

Por conseguinte, teremos que o produto $abc = (-3) \cdot 6 \cdot (-1) \Rightarrow abc = 18$.

5. $\frac{10\sqrt{15} - 36}{9}$

Solução:

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + d$ de raízes x, x e x' . Sabemos que:

$$\begin{cases} (i) & x + x + x' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} \Rightarrow 2x + x' = -3 \Rightarrow x' = -3 - 2x \\ (ii) & x \cdot x + x \cdot x' + x \cdot x' = \frac{c}{a} = -\frac{2}{1} \Rightarrow x^2 + 2xx' = -2 \\ (iii) & x \cdot x \cdot x' = -\frac{d}{a} = -\frac{d}{1} \Rightarrow -x^2x' = d \end{cases}$$

Substituindo (i) em (ii), teremos o valor da raiz dupla, veja:

$$x^2 + 2xx' = -2 \Rightarrow x^2 + 2x \cdot (-3 - 2x) = -2 \Rightarrow x^2 - 6x - 4x^2 = -2 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 36 + 24 = 60 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{2 \cdot 3}$$

Como x está no intervalo $]0,1[$, $x = \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{2 \cdot 3} = -1 + \frac{\sqrt{15}}{3}$. Voltando em (i):

$$x' = -3 - 2x = -3 - 2 \cdot \left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right) \Rightarrow x' = -3 + 2 - \frac{2\sqrt{15}}{3} \Leftrightarrow x' = -1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Enfim, por (iii):

$$-x^2 x' = d \Rightarrow -\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 \cdot \left(-1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}\right) = -\left(1 - \frac{2\sqrt{15}}{3} + \frac{15}{9}\right) \cdot \left(-1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}\right)$$

$$d = -\left(\frac{8 - 2\sqrt{15}}{3}\right) \cdot \left(\frac{-3 - 2\sqrt{15}}{3}\right) = -\frac{(-24 - 16\sqrt{15} + 6\sqrt{15} + 60)}{9} \Leftrightarrow \boxed{d = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}}$$