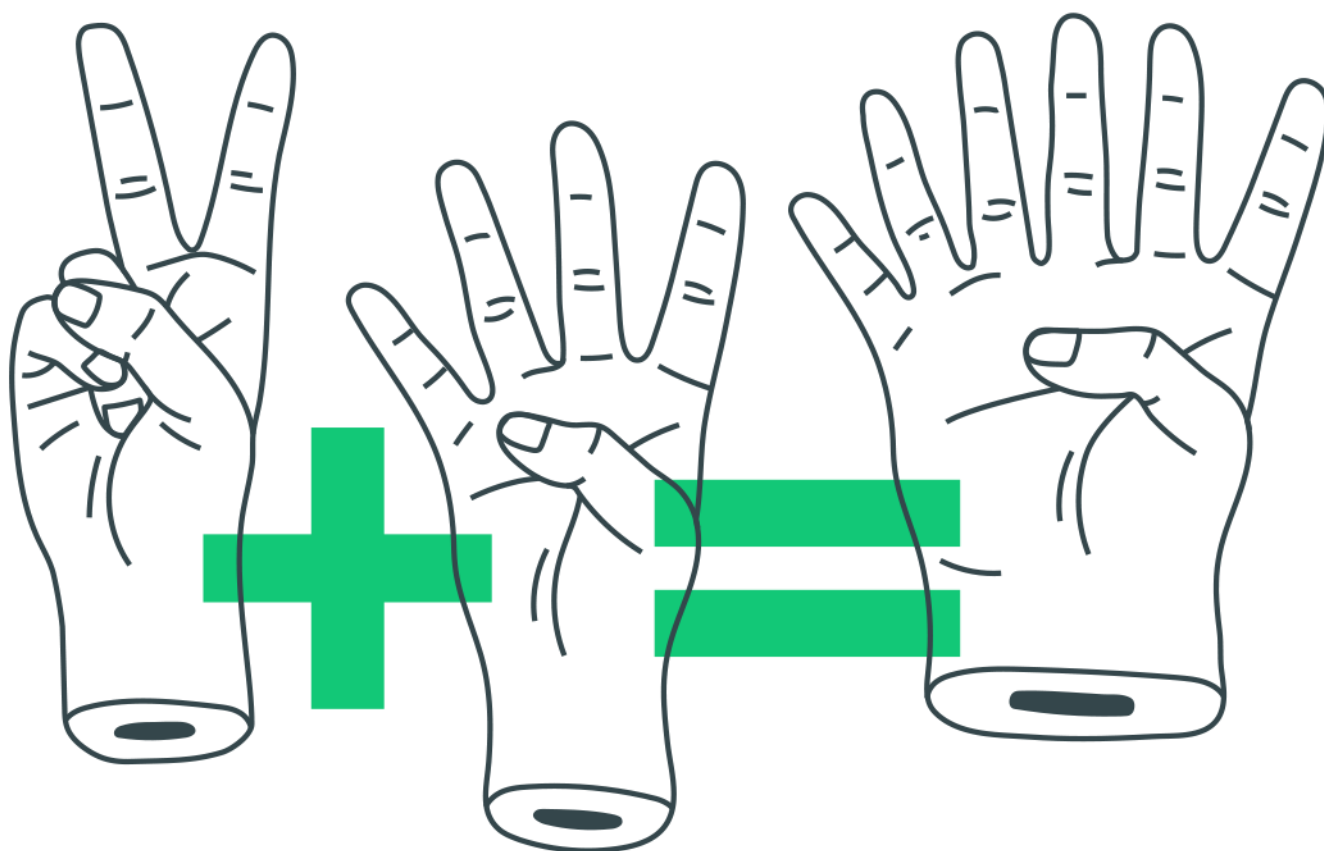


Polinômios I



Polinômios I

1. Qual é a multiplicidade da raiz 1 na equação $x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6 = 0$?
2. Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, no qual a , b e c são números reais e $b > 0$. Mostre que se $P(x) = -P(-x)$ para todo número real x , então a equação $P(x) = 0$ possui somente uma raiz real.
3. Seja $p(x)$ o polinômio com coeficientes reais de menor grau tal que $p(-1) = 0$, $p(0) = 1$ e $p(2) = 6$. Indique a soma dos coeficientes de $p(x)$.
4. Considere o polinômio p dado por $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$. Mostre que $i = \sqrt{-1}$ é uma de suas raízes e calcule as demais raízes.
5. A equação $-x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24 = 0$ tem duas de suas raízes iguais a 2. Dadas as funções reais f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, determine o domínio de g .

Gabarito

1. 1.3

SOLUÇÃO:

Através do dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

1		+1 - 8 + 24 - 34 + 23 - 6	
1		+1 - 7 + 17 - 17 + 6	0 \Rightarrow 1
1		+1 - 6 + 11 - 6	0 \Rightarrow 2
1		+1 - 5 + 6	0 \Rightarrow 3
		+1 - 4	+2

2. Demonstração. Uma única raiz real $x = 0$.

SOLUÇÃO:

Sabendo que $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ e partindo da premissa que $P(x) = -P(-x)$, temos:

i. $P(0) = -P(-0) \Rightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -(0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c) \Rightarrow c = -c \Leftrightarrow c = 0$

ii. $P(1) = -P(-1) \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = -((-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1)) \Rightarrow 1 + a + b = 1 - a + b \Leftrightarrow a = 0$

iii. Logo, $P(x) = x^3 + bx \Rightarrow P(x) = x \cdot (x^2 + b)$. Como $b > 0 \Leftrightarrow x^2 + b > 0$, $x^2 + b$ é sempre positivo, portanto, não possui raízes reais.

iv. Desta maneira, teremos $P(x) = 0 \Rightarrow 0 = x \cdot (x^2 + b) \Leftrightarrow x = 0$. Por conseguinte, o polinômio $P(x)$ possui uma única raiz real $x = 0$. \square

3. 3

SOLUÇÃO:

i. $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 6)$ não são colineares, portanto, $P(x)$ não é do primeiro grau: $P(x) = ax^2 + bx + c$.

ii. $P(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = 1$

iii. $P(-1) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 = 0 \Rightarrow b = a + 1$

iv. $P(2) = 6 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 6 \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 6$

$$\left. \begin{array}{l} b = a + 1 \\ 4a + 2b + 1 = 6 \end{array} \right\} 4a + 2 \cdot (a + 1) + 1 = 6 \Rightarrow 6a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

v. Assim, temos que $a + b + c = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 \Leftrightarrow a + b + c = 3$.

4. Demonstração. As raízes são: i , $-i$, $2 + i$ e $2 - i$.

SOLUÇÃO:

$$i. p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 \Rightarrow p(i) = i^4 - 4i^3 + 6i^2 - 4i + 5$$

$$p(i) = i^0 - 4 \cdot (-i) + 6 \cdot (-1) - 4i + 5 \Rightarrow p(i) = 1 + 4i - 6 - 4i + 5$$

$$p(i) = 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow p(i) = 0 \rightarrow \text{Portanto, } i \text{ é raiz de } P(x). \square$$

ii. Se um número complexo z é raiz de $P(x)$, então seu conjugado \bar{z} também é raiz desse polinômio. Logo, $-i$ é raiz de $P(x)$.

$$iii. \text{ Podemos escrever: } P(x) = (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$$

$$P(x) = (x^2 - i^2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) = (x^2 + 1) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$$

Ou seja, $P(x)$ é divisível por $x^2 + 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 & x^2 + 1 \\ \hline \cancel{x^4} & x^2 - 4x + 5 \\ \hline & -x^2 \\ \hline & \cancel{-4x^3} + 5x^2 - 4x + 5 \\ & + 4x^3 & + 4x \\ \hline & + 5x^2 & + 5 \\ & - 5x^2 & - 5 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

$$iv. P(x) = (x^2 - i^2) \cdot (x^2 - 4x + 5) \Rightarrow P(x) = (x^2 - i^2) \cdot (x^2 - 4x + 5)$$

Precisamos achar as raízes de $x^2 - 4x + 5$, por Bhaskara, teremos:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

Por fim, sabemos que as raízes de $P(x)$ são $-i$, i , $2 - i$ e $2 + i$.

5. $]1, 2[\cup]2, 6[$

SOLUÇÃO:

$$i. g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \Rightarrow \sqrt{f(x)} \neq 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

ii. $f(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24$ tem uma raiz dupla $x = 2$, portanto,

$$P(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24 \text{ é divisível por } (x - 2) \cdot (x - 2).$$

$$\begin{array}{r|l}
 -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24 & x^2 - 4x + 4 \\
 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 & -x^2 + 7x - 6 \\
 \hline
 + 7x^3 - 34x^2 + 52x - 24 & \\
 - 7x^3 + 28x^2 - 28x & \\
 \hline
 - 6x^2 + 24x - 24 & \\
 + 6x^2 - 24x + 24 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$iii. P(x) = (x^2 - 4x + 4) \cdot (-x^2 + 7x - 6) = (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (-x^2 + 7x - 6)$$

Precisamos achar as raízes de $-x^2 + 7x - 6$, por Bhaskara, teremos:

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 49 - 24 = 25 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-7 \pm 5}{-2} \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 6 \end{cases}$$

Por fim, sabemos que as raízes de $P(x)$ são 1, 2, 2 e 6.

Fazendo o estudo dos sinais de $f(x)$, teremos:

$$- \boxed{1 + 2} - \boxed{2 + 6} -$$

iv. Por conseguinte, o domínio de g é $(1, 2) \cup (2, 6)$.