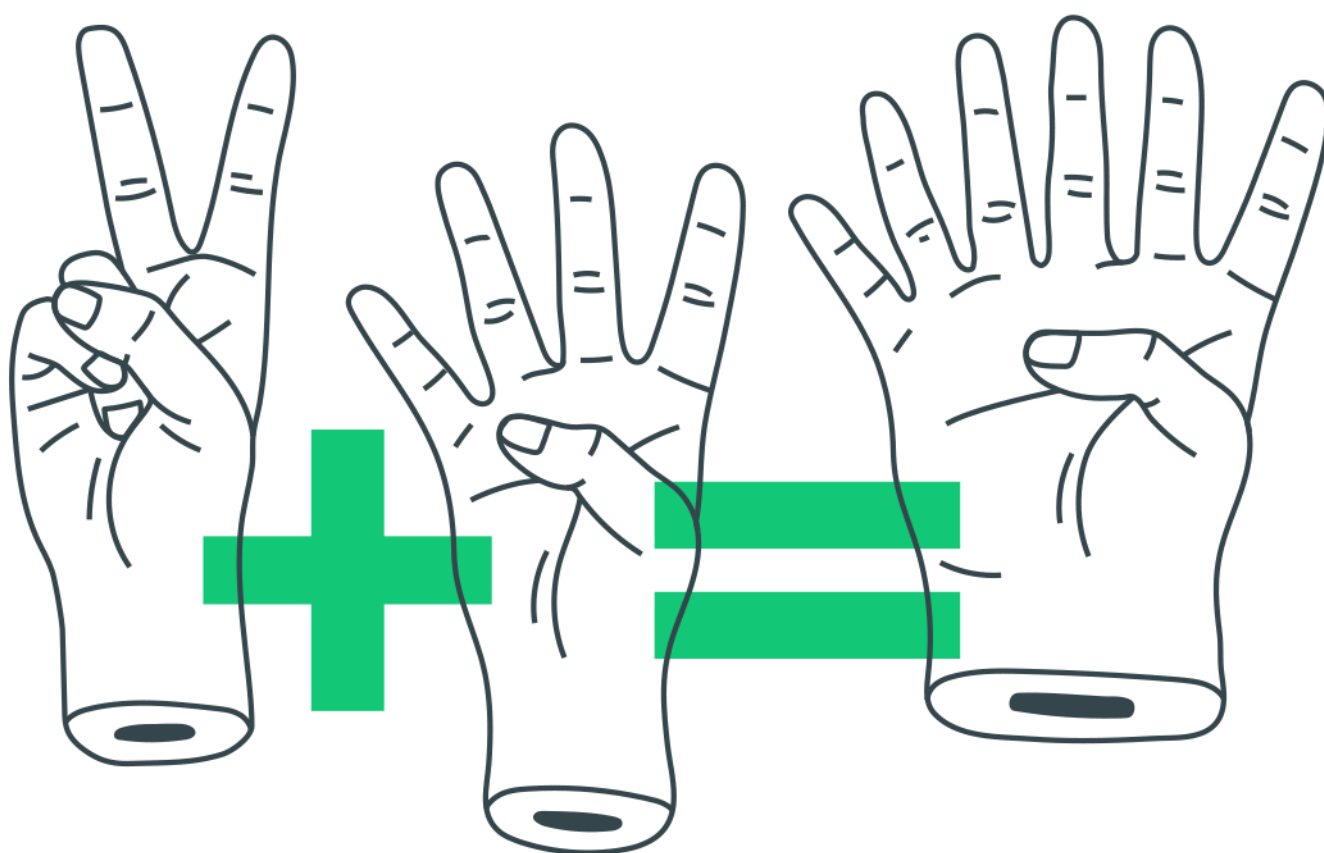


Números Complexos IV



Números Complexos IV

1. Considere os números complexos da forma $z(t) = 3^t + t.i$, na qual $t \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária. Os pares ordenados (x, y) , em que x e y são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do número complexo z , definem o gráfico de uma função da forma $y = f(x)$.

Como é classificada a função representada pelo gráfico assim definido?

2. Considere o seguinte número complexo: $z = (1 - i)/(1 + i\sqrt{3})$

Ao escrever z na forma trigonométrica, quais serão os valores do módulo e do argumento?

3. Um matemático, observando um vitral com o desenho de um polígono inscrito em um círculo, verificou que os vértices desse polígono poderiam ser representados pelas raízes cúbicas complexas do número 8.

Qual a área do polígono observado pelo matemático?

4. Considere no Plano de Argand-Gauss os números complexos $z = x + yi$, onde $i = \sqrt{-1}$ e cujos afixos são os pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Dada a equação $(z - 1 + i)^4 = 1$, sobre os elementos que compõem seu conjunto solução, é verdade que apenas um deles é imaginário puro? Justifique.

5. Se $(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = x + iy$, em que i é a unidade imaginária e x e y são números reais, qual é o valor de $\sqrt{3} \cdot x + y$?

Gabarito

1. Logarítmica.

SOLUÇÃO:

Se a parte real representa x , temos que $x = 3^y$; e a parte imaginária representa y , então, temos $y = t$. Assim, $x = 3^y$, ou seja, $y = \log_3 x$ (definição de logaritmo). Por conseguinte, $f(x)$ é uma função logarítmica.

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{17\pi}{12}$, respectivamente.

SOLUÇÃO:

$$i. z = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right) = \frac{1-i\sqrt{3}-i+i^2\sqrt{3}}{1-3i^2} = \frac{1-1\cdot\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}}{1+3} = \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}_a - \underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}_b \cdot i$$

$$ii. \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(1-2\sqrt{3}+3) + (1+2\sqrt{3}+3)} =$$

$$\text{Assim, teremos nosso módulo igual a } \rho = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4+4} = \frac{2}{4} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$iii. \begin{cases} \sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}. \\ \cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$$

$$iv. \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (1+\sqrt{3})}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-1)} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \Leftrightarrow \boxed{\theta = \frac{17\pi}{12}}.$$

3. $3\sqrt{3}$ u.a.

SOLUÇÃO:

i. Sabemos que os n vértices, soluções de z^n , ficam angularmente equidistantes de um ângulo de $\frac{360^\circ}{n}$,

neste caso, $n = 3$, então, $a_i = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

ii. Para descobrirmos o raio do círculo circunscrito, temos $r = |z|^{\frac{1}{n}}$, isto é, $r = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$. Portanto, temos um triângulo equilátero inscrito num círculo de raio 2.

iii. Sendo o centro do círculo também o baricentro desse triângulo, teremos que $r = \frac{2}{3}h$ e que $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$:

$$2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow l = 2\sqrt{3}.$$

iv. A área do triângulo equilátero é dada por $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A = 3\sqrt{3}$ u.a.

4. Sim. Justificativa.

SOLUÇÃO:

$$i. (z-1+i)^4 = 1 \Rightarrow (z-1+i) = \sqrt[4]{1} \Rightarrow (z-1+i) = \begin{cases} -1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{cases}$$

$$ii. \begin{cases} z-1+i = -1 \Rightarrow z = -i \text{ (imaginário puro)} \\ z-1+i = -i \Rightarrow z = 1-2i \text{ (complexo)} \\ z-1+i = 1 \Rightarrow z = 2-i \text{ (complexo)} \\ z-1+i = i \Rightarrow z = 1 \text{ (real)} \end{cases}$$

iii. Portanto temos uma única solução que é um imaginário puro.

5. $\sqrt{6}$

SOLUÇÃO:

$$i. \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$ii. \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = x + iy \Rightarrow \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = x + iy$$

$$iii. \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = x + iy \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$iv. \sqrt{3}x + y = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Por conseguinte, temos que: $\sqrt{3}x + y = \sqrt{6}$.