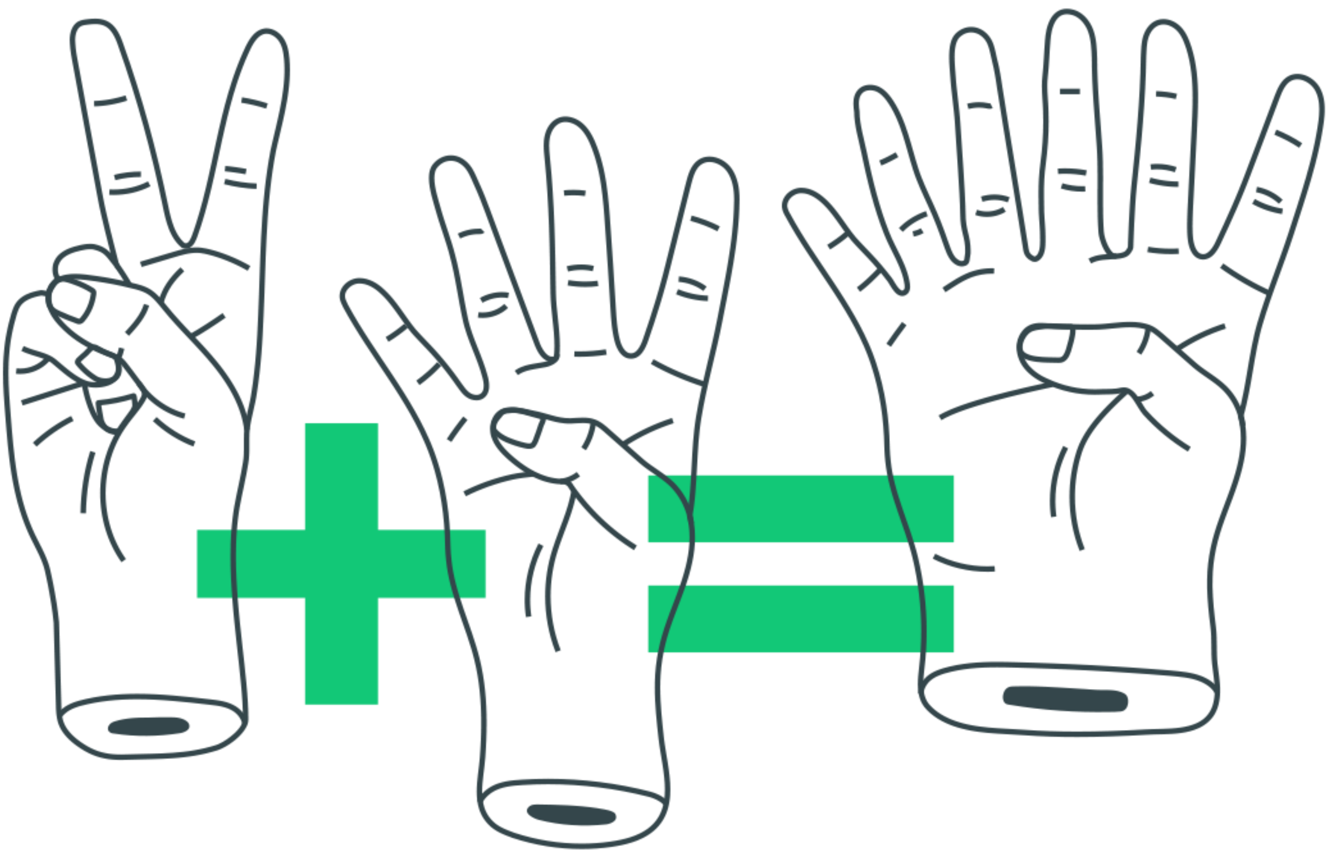
descomplica

AULA AO VIVO

Matemática

PC Sampaio
(Natália Peixoto)
01º.12.2016

Números Complexos III



Números Complexos III

1. Se x e y são números reais não nulos, qual é o módulo do número complexo $z = \frac{x - iy}{x + iy}$?

2. O conjunto dos afixos dos números complexos z, tais que $z \cdot \bar{z} + 2\,\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(\bar{z})$ determinam, no plano de Argand-Gauss, uma região limitada. Calcule aproximadamente a área dessa região em u.a.

3. No plano complexo, o número z = 2 – 3i é o centro de um quadrado e w = 5 – 5i é um de seus vértices. Qual é o número complexo que representa o vértice do quadrado não consecutivo a w?

4. O conjugado, $\bar{z}$, do número complexo z = x + iy, com x e y números reais, é definido por $= \bar{z}$ x – iy. Identificando o número complexo z = x + iy com o ponto (x, y) no plano cartesiano, podemos afirmar corretamente que o conjunto dos números complexos z que satisfazem a relação $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$ estão sobre qual lugar geométrico?

5. Os números complexos z e w, escritos na forma z = x + yi e w = u + vi em que x ≠ 0 e u ≠ 0, são tais que z . w = 1. Quanto vale a soma dos quadrados $u^2 + v^2$?

Gabarito

1. 1.
SOLUÇÃO:

i. Racionalizando o denominador, de forma a não termos parte imaginária no mesmo, temos: $z=\frac{x-iy}{x+iy}\cdot\left(\frac{x-iy}{x-iy}\right)$

ii. Obteremos o quociente de um trinômio quadrado perfeito pelo produto da soma pela diferença: $\frac{(x-iy)^2}{(x+iy)\cdot(x-iy)}$

iii. Lembrando dos produtos notáveis $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ e $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$: $\frac{x^2-2\cdot x\cdot iy+(iy)^2}{x^2-(iy)^2}$

iv. Simplificando a fração, temos: $\frac{x^2-2xyi+i^2y^2}{x^2-i^2y^2}$, (sabemos que $i^2=-1$), $\frac{x^2-2xyi-y^2}{x^2+y^2}=\underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{a}-\underbrace{\frac{2xy}{x^2+y^2}}_{b}\cdot i$

v. Portanto, o módulo de z será dado por: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2}$. Desenvolvendo o módulo:

$\sqrt{\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}}=\sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}}=\sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}}$, sabendo que x e y $\in\mathbb{R}^*$, teremos: $|z|=\sqrt{1}=1$.

2. 3,9 u.a.
SOLUÇÃO:

i. Considerando o complezo $z=a+bi$, temos que seu conjugado $z=a-bi$, Re(z) = a (parte real de z) e Im($\bar{z}$) = $-b$ (parte imaginária do conjugado).

ii. Como temos que satisfazer a inequação, temos: $z\cdot\bar{z}+2\mathrm{Re}(z)\le\mathrm{Im}(\bar{z})\Rightarrow(a+bi)\cdot(a-bi)+2a\le -b\Rightarrow a^2-b^2i^2+2a+b\le 0$

$a^2+b^2+2a+b\le 0$.

iii. Completando quadrados, teremos uma equação de circunferência: $a^2+2a+1+b^2+b+\frac{1}{4}\le +1+\frac{1}{4}\Rightarrow(a+1)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{4}$

iv. Com isso, temos $C\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ e $r^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{5}}{2}\approx\frac{2,24}{2}\Leftrightarrow r\approx 1,12$.

v. Por conseguinte, a áera desejada é $A=\pi r^2\approx 3,14\cdot(1,12)^2\Leftrightarrow A\approx 3,9u.a.$

3. − 1 − i.
SOLUÇÃO:

Sendo w e w' pontos não consecutivos de um quadrado, z como centro é ponto médio de $\overline{ww'}$.

Assim, temos que: $z = \dfrac{w+w'}{2} \Rightarrow 2-3i = \dfrac{5-5i+w'}{2} \Rightarrow 4-6i = 5-5i+w' \Leftrightarrow w' = -1-i.$

4. Circunferência.

SOLUÇÃO:

i. Considere $z = a+bi$ e, assim, $\bar{z} = a-bi$, satisfazendo a equação $z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}=0$:

$(a+bi)\cdot(a-bi)+a+bi+a-bi=0 \Rightarrow a^2-b^2i^2+2a=0 \Rightarrow a^2+b^2+2a=0.$

ii. Completando quadrados: $a^2+2a+1+b^2=0+1 \Leftrightarrow \boxed{(a+1)^2+(b+0)^2=1^2}$.

iii. Portanto, temos uma circunferência de centro $C(-1,0)$ e rairo r = 1.

5. u/x.

SOLUÇÃO:

$z\cdot w=1 \Rightarrow (x+yi)\cdot(u+vi)=1 \Rightarrow xu+xvi+yui+yvi^2=1 \Rightarrow xu-yv+i\cdot(xv+yu)=1+0i$

$$\begin{cases} xu-yv=1 \Rightarrow xu=1+yv \Leftrightarrow u=\dfrac{1+yv}{x} \\ xv+yu=0 \Rightarrow yu=-xv \Leftrightarrow u=-\dfrac{xv}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1+yv}{x}=-\frac{xv}{y} \Rightarrow y+y^2v=-x^2v \Rightarrow x^2v+y^2v=-y$$

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i. } v\cdot(x^2+y^2)=-y \Leftrightarrow \boxed{v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}} \\ \text{ii. } u=-\dfrac{xv}{y} \Rightarrow u=-\dfrac{x}{y}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \boxed{u=\dfrac{x}{x^2+y^2}} \end{array}\right\} u^2+v^2=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2$$

$$\text{iii. } u^2+v^2=\frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{x}\right) \Rightarrow u^2+v^2=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=u:x \Leftrightarrow \boxed{u^2+v^2=\frac{u}{x}}.$$