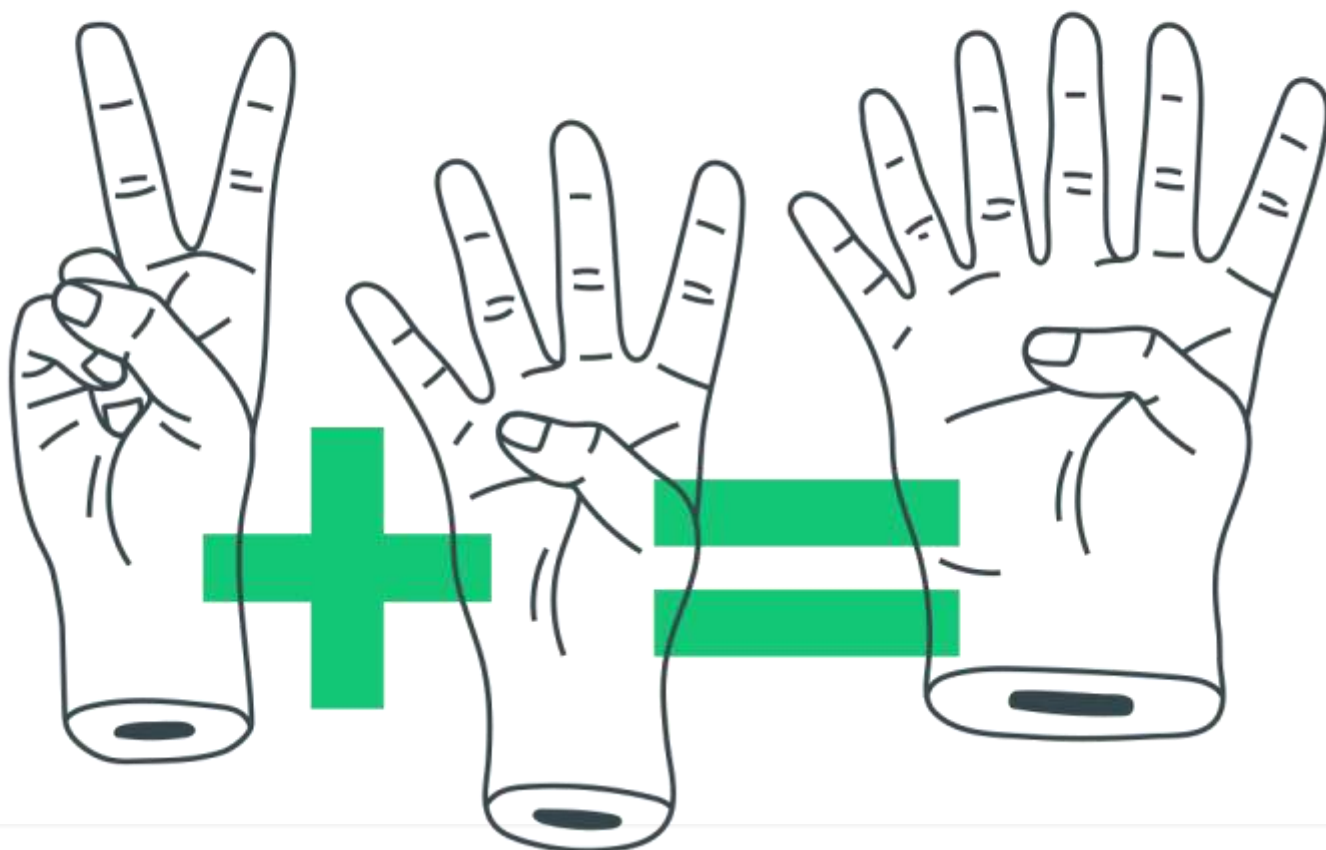
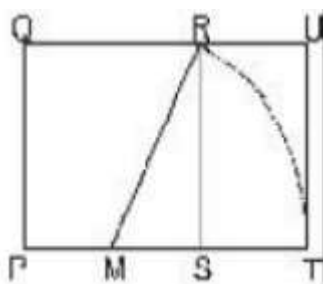


# Geometria: Razão Áurea



## Geometria: Razão Áurea

1. As manifestações da Geometria na natureza vêm intrigando muitas pessoas ao longo do tempo. Nas proporções do corpo humano e na forma da concha do Nautilus, por exemplo, observa-se a chamada “razão áurea”, que pode ser obtida por meio da seguinte construção geométrica:



No quadrado PQRS representado na figura, considere M o ponto médio do segmento  $\overline{PS}$ . Construa um círculo com centro em M e raio  $\overline{MR}$ , obtendo o ponto T no prolongamento de  $\overline{PS}$ . O retângulo de lados  $\overline{PT}$  e  $\overline{QP}$  é áureo e a razão entre esses lados  $\left(\frac{\overline{PT}}{\overline{QP}}\right)$  é a razão áurea. Qual o valor dessa razão?

2. O número de ouro, também conhecido como razão de ouro, tem sido utilizado durante séculos por pintores e arquitetos. Hoje sabemos que  $\Phi$  está presente em algumas curvas que aparecem na natureza, como na margarida, no girassol e na concha do molusco náutilo.

Dizemos que um ponto P (figura 1) divide um segmento AB na razão de ouro, se  $(AP)/(PB) = (AB)/(AP)$ .

A razão  $(AB)/(AP)$  é chamada razão de ouro e é representada pela letra grega  $\Phi$  (lê-se fi). Seu valor é constante, independente da medida do segmento AB.

a) Admitindo que o segmento AB (figura 2) tenha comprimento 1 determine o comprimento do segmento AP, de tal modo que  $(AP)/(PB) = (AB)/(AP)$ .

Figura 1

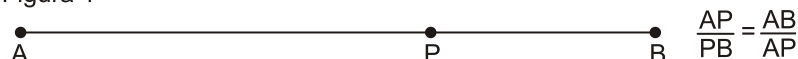
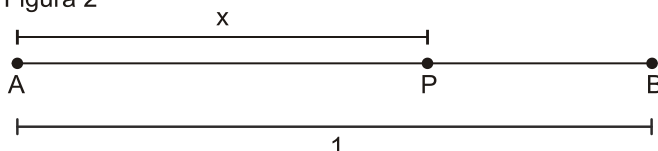


Figura 2

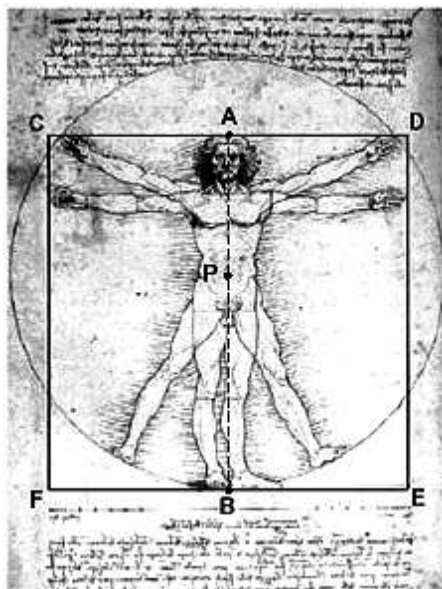


b) Determine a razão de ouro  $\Phi$

c) Na figura 3, temos o famoso desenho de Leonardo da Vinci conhecido como o Homem Vitruviano. Leonardo utilizou a razão áurea na construção do desenho em vários momentos. Por exemplo, o segmento que une o ponto A (extremidade da cabeça) ao ponto B (pé) está dividido na razão áurea pelo ponto P (umbigo), sendo PB maior que AP. Sabendo que o lado do quadrado CDEF mede 16,2 cm, utilize a razão de ouro para calcular o comprimento do segmento PB (a distância do umbigo até o pé).

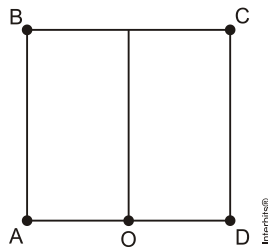
Considere somente neste item, que  $\sqrt{5} \approx 2,24$

Figura 3

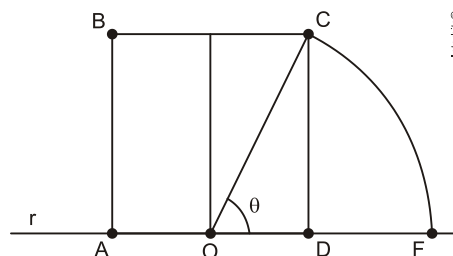


3. O número áureo aparece com frequência em proporções ligadas a fenômenos da natureza e em magníficos projetos arquitetônicos. Neste contexto, alguns objetos matemáticos estão associados à elaboração estrutural de tais projetos. Este é o caso do retângulo áureo, cuja razão entre o maior e o menor lado é o número áureo. Uma maneira simples de construir um retângulo áureo é dada pelo seguinte roteiro:

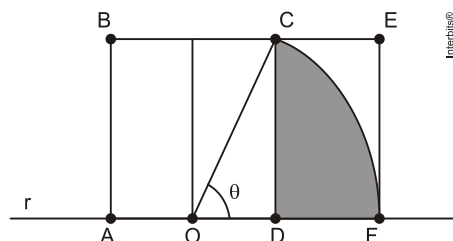
1º) Construa um quadrado ABCD de lados medindo 1 metro e um segmento de reta ligando o ponto médio O do lado AD ao ponto médio do lado BC, oposto ao lado AD.



2º) Considere a reta  $r$  contendo o segmento AD. Com centro em O e raio OC, trace um arco de circunferência do vértice C até intersectar a reta  $r$  no ponto F.



3º) Prolongue BC e trace a perpendicular à  $r$  por F, obtendo o ponto E. O retângulo ABEF é áureo.



No retângulo áureo ABEF, se o ângulo  $\theta$  é dado em radianos, então, Qual a expressão que corresponde ao valor da área sombreada, em  $m^2$ ?

4. O ponto P é interior a um segmento de reta, cuja medida é  $x = 2m$ , e o divide em dois segmentos cujas medidas são y e z e satisfazem a relação  $y^2 = xz$ . Calcule a razão  $x/y$  (denominada de número de ouro ou razão áurea).

5. O retângulo de ouro é utilizado em Arquitetura desde a Grécia Antiga. A razão entre as medidas do maior e do menor lado desse retângulo é o número de ouro, representado por  $\phi$

a) Sabendo que  $\phi$  é uma das raízes da equação  $x^2 = x + 1$ , calcule o valor de  $\phi$

b) Observe as implicações abaixo.

$$\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \begin{cases} \phi^3 = \phi^2 + \phi \Rightarrow \phi^3 = 2\phi + 1 \\ \phi^4 = \phi^3 + \phi^2 \Rightarrow \phi^4 = 3\phi + 2 \end{cases}$$

Determine todas as raízes complexas da equação  $x^4 = 3x + 2$

## Gabarito

1. Considerando a o lado do quadrado,  $PM = MS = a/2$  e, também, o raio  $MR = MT = y$ . Observando que o triângulo MSR é retângulo em S, temos:

$$y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

A razão que queremos é dada por:

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{PM} + \overline{MT}}{\overline{QP}} = \frac{a/2 + y}{a} = \frac{a/2 + a\sqrt{5}/2}{a} = \frac{a(1 + \sqrt{5})/2}{a} = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

2. a)  $x/(1-x) = 1/x$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = (-1 + \sqrt{5})/2$$

$$b) 1 / [(-1 + \sqrt{5})/2] = 2/(-1 + \sqrt{5}) = (\sqrt{5} + 1)/2$$

$$c) (\sqrt{5} + 1)/2 = 16,2 / PB$$

$$3,4 \cdot PB = 32,4$$

$$PB = 10 \text{ cm}$$

- 3.

Sabendo que  $\overline{AD} = 1\text{m}$  e O é o ponto médio de AD, do triângulo retângulo ODC, vem

$$\begin{aligned}\overline{OC}^2 &= \overline{OD}^2 + \overline{DC}^2 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \\ \Leftrightarrow \overline{OC}^2 &= \frac{5}{4} \text{ m}^2.\end{aligned}$$

A área pedida é dada pela diferença entre as áreas do setor circular OFC e do triângulo retângulo ODC, ou seja,

$$\begin{aligned}(\text{OFC}) - (\text{ODC}) &= \frac{\overline{OC}^2 \cdot \theta}{2} - \frac{\overline{OD} \cdot \overline{DC}}{2} \\ &= \frac{\frac{5}{4} \cdot \theta}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} \\ &= \frac{5\theta - 2}{8} \text{ m}^2.\end{aligned}$$

4.  $z + y = 2 \Rightarrow z = 2 - y$ . Assim, sendo  $x = 2$  e  $z = 2 - x$ , teremos:  
 $y^2 = x \cdot z \Rightarrow y^2 = 2 \cdot (2 - y) \Rightarrow y^2 = 4 - 2y \Rightarrow y^2 + 2y - 4 = 0$ . Resolvendo a equação do segundo grau, teremos:  $y = \sqrt{5} - 1$  ou  $y = -\sqrt{5} - 1$  (não convém, pois é negativo)., Portanto, teremos:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

5. a) Gabarito Oficial:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1)$$

$$\Delta = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- b) Gabarito Oficial:

$$x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x - 2$$

$$-x^4 + x^3 + x^2$$

$$\hline x^3 + x^2 - 3x$$

$$-x^3 + x^2 + x$$

$$\hline 2x^2 - 2x - 2$$

$$-2x^2 + 2x + 2$$

$$\hline 0$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2$$

$$\Delta = -7$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Raízes: } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$