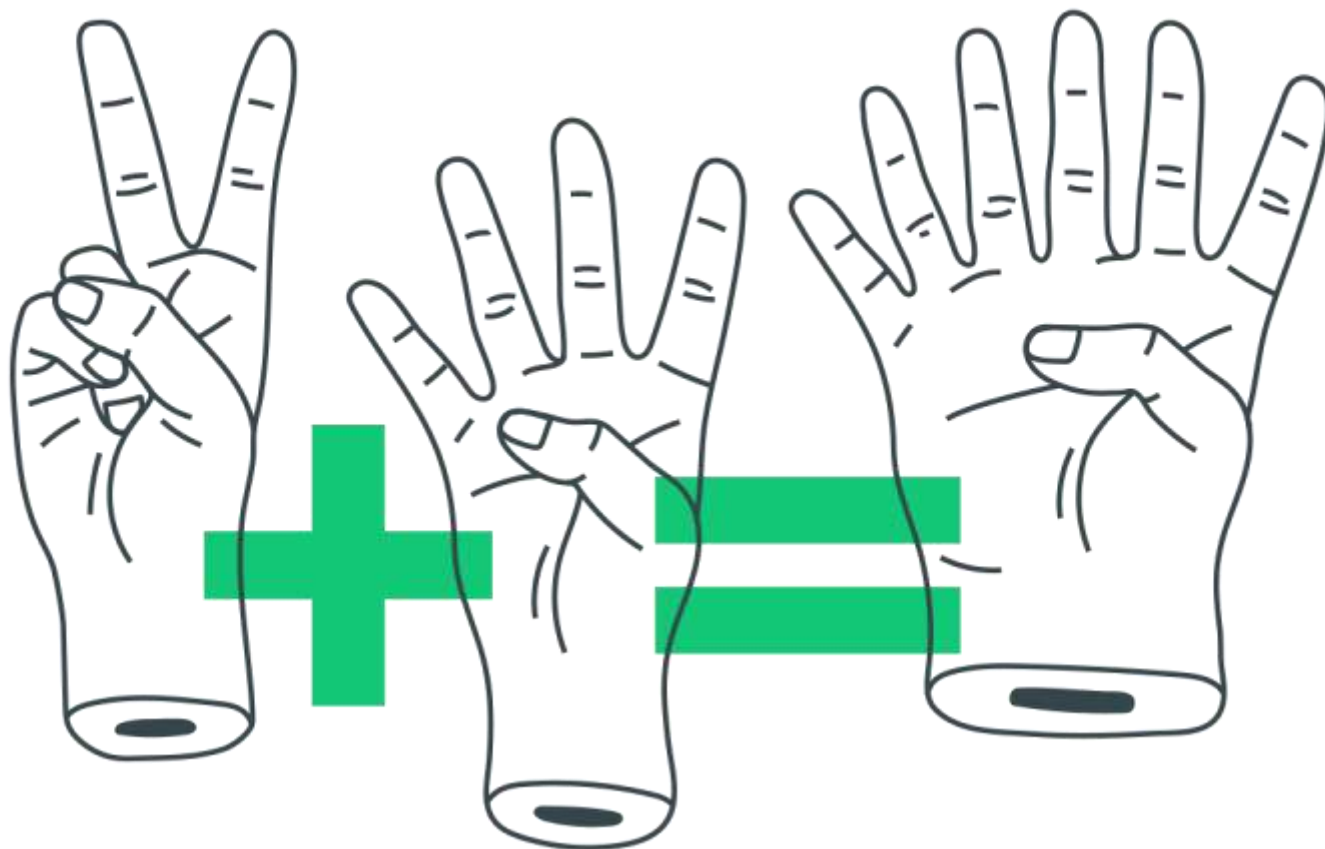


Complexos II



Complexos II

1. Considere os números complexos $w = 4 + 2i$ e $z = 3a + 4ai$, onde a é um número real positivo e i indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é $|z|$ e a base é a parte real de $z.w$, determine a de modo que a área do triângulo seja 90cm^2 .
2. Quatro números complexos representam, no plano complexo, vértices de um paralelogramo. Três dos números são $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1 + \frac{5}{2}i$. O quarto número tem as partes real e imaginária positivas. Calcule esse número.
3. Três números complexos estão representados no plano de Argand-Gauss por três pontos que dividem uma circunferência de centro na origem $(0,0)$ em partes iguais. Um desses números é igual a 1. Determine os outros dois números, faça um esboço da circunferência e calcule a área do triângulo cujos vértices são os três pontos.
4. Considere o complexo $u = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, onde $i = \sqrt{-1}$. Encontre o número complexo v cujo módulo é igual a 2 e cujo argumento é o triplo do argumento principal de u .
5. Determine o menor inteiro $n \geq 1$ para o qual $(\sqrt{3} + i)^n$ é um número real positivo.

Gabarito

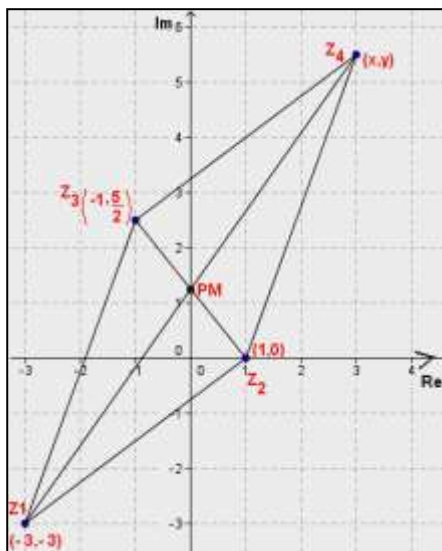
1. Calculando os valores da base e altura do triângulo, temos:

$$i) \begin{cases} z = 3a + 4ai \\ altura = |z| \end{cases} \Rightarrow altura = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = \sqrt{25a^2} = 5a$$

$$ii) \begin{cases} z = 3a + 4ai \\ w = 4 + 2i \end{cases} \Rightarrow base = \operatorname{Re}[(3a + 4ai)(4 + 2i)] = \operatorname{Re}[12a + 6ai + 16ai + 8ai^2] = \operatorname{Re}[12a + 6ai + 16ai - 8a] \Rightarrow \Rightarrow \operatorname{Re}[4a + 22ai] = 4a$$

$$iii) \begin{cases} Área = \frac{(base) \times (altura)}{2} \\ Área = 90 \end{cases} \Rightarrow \frac{(4a) \times (5a)}{2} = 90 \Rightarrow 20a^2 = 180 \Rightarrow a^2 = \frac{180}{20} \Rightarrow a = \sqrt{9} = 3$$

2.



As diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio. As coordenadas do ponto médio entre dois pontos são as médias aritméticas das coordenadas desses pontos.

Identificando as coordenadas dos complexos, temos:

$$\begin{cases} z_2 = (1, 0) \\ z_3 = (-1, \frac{5}{2}) \end{cases} \Rightarrow PM = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{0+\frac{5}{2}}{2} \right) = \left(0, \frac{5}{4} \right)$$

O ponto médio entre Z_2 e Z_3 é o mesmo entre Z_1 e Z_4 .

$$\begin{cases} PM = \left(0, \frac{5}{4}\right) \\ \begin{cases} z_1 = (-3, -3) \\ z_4 = (x, y) \end{cases} \Rightarrow PM = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-3+y}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{-3+x}{2} = 0 \\ \frac{-3+y}{2} = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 4y-12=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{22}{4}=\frac{11}{2} \end{cases} \end{cases}$$

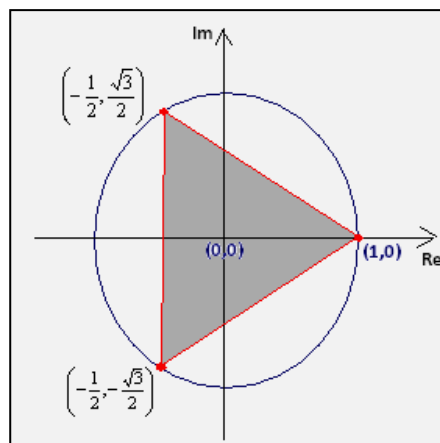
Logo, $z_4 = 3 + \frac{11}{2}i$

3. O módulo do complexo será o raio da circunferência que vale 1. O triângulo equilátero divide a circunferência em três arcos congruentes. Logo, cada afixo está distante do outro consecutivo de 120° ou $\frac{2\pi}{3}$.

$$z_1 = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{(1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{0}{1} \\ \cos \theta_1 = \frac{1}{1} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_2 = 0 + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \\ \theta_3 = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_2 = z_2 = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ z_3 = z_2 = 1 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases}$$



A área é calculada aplicando a metade do módulo do determinante das coordenadas:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 0 + 1 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

4. Escrevendo o complexo “u” na forma trigonométrica e verificando as condições, temos:

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow |u| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\begin{cases} \sin \theta_u = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \cos \theta_u = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_u = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \theta_v = 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} \\ |v| = 2 \end{cases}$$

$$v = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

5. Escrevendo o complexo na forma trigonométrica, temos:

$$z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]; k \in \mathbb{Z}$$

$$z^n = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]^n = 2^n \left[\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \right] \Rightarrow z^n \text{ real} \Rightarrow \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \Rightarrow$$

$$n = 6k \in \mathbb{N}$$

Para $k = 1$, $n = 6$. Mas a parte real seria $\cos \pi = -1 < 0$. Logo, $k = 2$ e o menor “n” é 12.