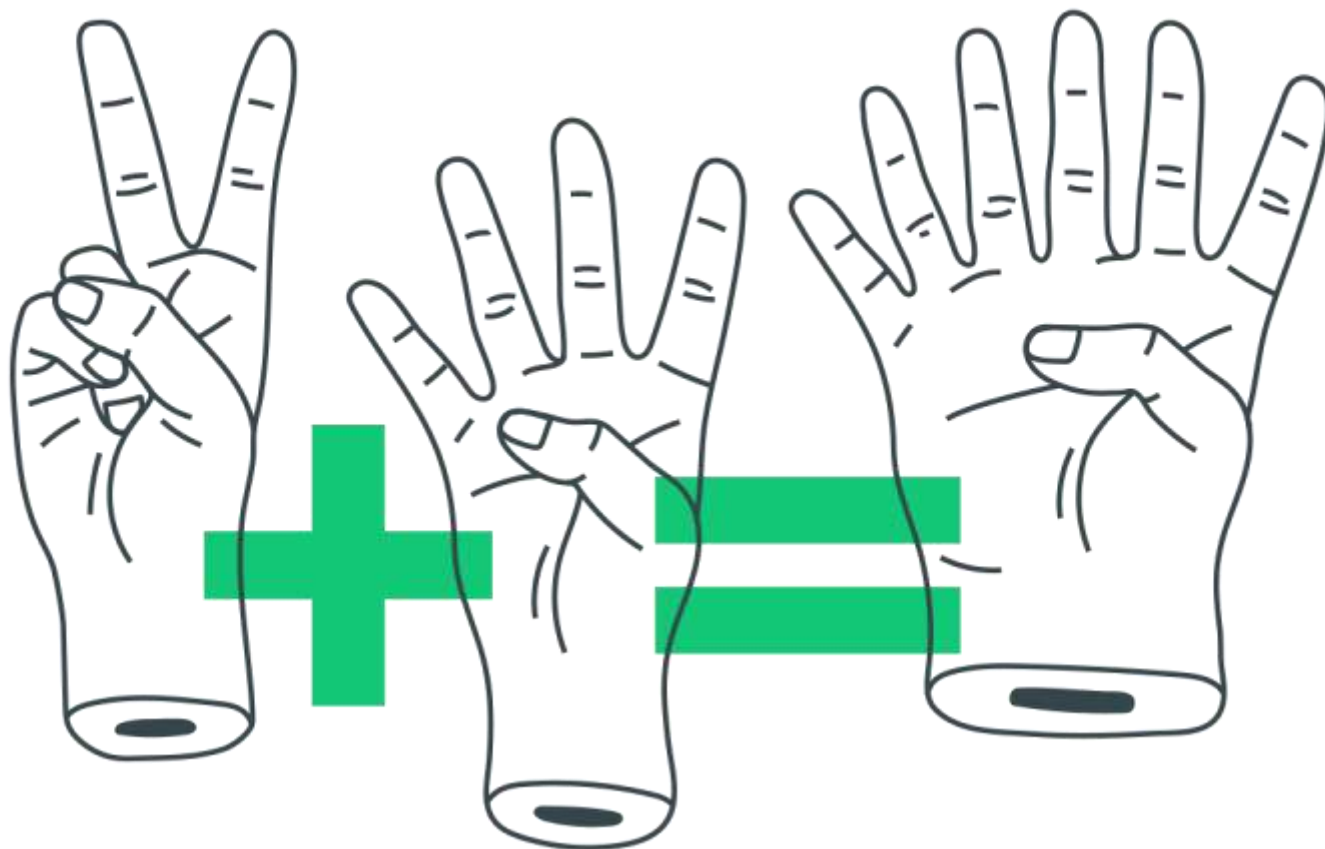


# Complexos I



## Complexos I

1. As seis soluções da equação  $z^6 + z^3 + 1 = 0$  são números complexos que possuem módulos iguais e argumentos distintos.

O argumento  $\theta$  em radianos, de uma dessas soluções pertence ao intervalo  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .  
Determine a medida de  $\theta$

2.

### Multinacionais de alimentos agravam pobreza

Documento da ActionAid, apresentado no Fórum Social Mundial de 2011, revela que um pequeno grupo de empresas domina a maior parte do comércio mundial de itens como trigo, café, chá e bananas. Um terço de todo o alimento processado do planeta está nas mãos de apenas 30 empresas. Outras 5 controlam 75% do comércio internacional de grãos. Do total da produção e da venda de agrotóxicos, também 75% são dominados por 6 companhias, e uma única multinacional, a Monsanto, detém 91% do setor de produção e venda de sementes.

Adaptado de [www.observatoriosocial.org.br](http://www.observatoriosocial.org.br)

O texto faz referência ao processo de modernização da agropecuária mundial, com a formação e a expansão de complexos agroindustriais.

Defina o que são complexos agroindustriais.

Com base na reportagem, aponte duas consequências socioeconômicas negativas resultantes da situação de reduzida concorrência no setor agrícola.

3. Leia o texto a seguir.

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a **compreender que os números complexos não têm nada de “irreal”**. São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

*Adaptado de: CARNEIRO, J. P. “A Geometria e o Ensino dos Números Complexos”. Revista do Professor de Matemática. 2004. v.55. p.18.*

Escreva uma composição de rotação dos pontos  $P(-3, 4)$  e  $Q(2, -3)$  representados pelos números complexos  $z = -3 + 4i$  e  $w = 2 - 3i$ .

4. Sendo a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, calcule o valor da expressão  $(i+1)^6 - (1-i)^6$ .

5. João desenhou um mapa do quintal da sua casa onde enterrou um cofre. Para isso, usou um sistema de coordenadas retangulares, colocando a origem  $O$  na base de uma mangueira, e os eixos  $Ox$  e  $Oy$  com sentidos oeste-leste e sul-norte, respectivamente. Cada ponto  $(x, y)$ , nesse sistema, é a representação de um número complexo  $z = x + iy$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = -1$ .

Para indicar a posição  $(x_1, y_1)$  e a distância  $d$  do cofre a origem, João escreveu a seguinte observação no canto do mapa:  $x_1 + iy_1 = (1 + i)^9$ .

- a) Calcule as coordenadas  $(x_1, y_1)$ .
- b) Calcule o valor de  $d$ .

## Gabarito

1. Na equação  $z^2 + z + 1 = 0$ , substitui-se  $z$  por  $y$ :

$$\begin{aligned}y^2 + y + 1 &= 0 \\y &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \\y &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\y_1 &= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \text{ou} \\y_2 &= \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

Para determinar as raízes cúbicas de um número complexo  $w = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , usa-se a seguinte relação:

$$w_k = \sqrt[3]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], k \in \{0, 1, 2\}.$$

Portanto, as raízes cúbicas do número complexo

$$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$$

são determinadas por:

$$w_0 = \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i \times \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right) \right]$$

$$w_1 = \left[ \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i \times \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{9}\right) \right]$$

$$w_2 = \left[ \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + i \times \operatorname{sen}\left(\frac{14\pi}{9}\right) \right]$$

Analogamente, as raízes cúbicas do número complexo

$$y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right)$$

são determinadas por:

$$w_3 = \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i \times \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right]$$

$$w_4 = \left[ \cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + i \times \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{9}\right) \right]$$

$$w_5 = \left[ \cos\left(\frac{16\pi}{9}\right) + i \times \operatorname{sen}\left(\frac{16\pi}{9}\right) \right]$$

Como  $\theta \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right),$

$$\theta = \arg(w_1) = \frac{8\pi}{9}$$

2. Os complexos agroindustriais podem ser definidos como grandes cadeias produtivas que articulam a produção agrícola com a produção industrial e com os setores de comércio e serviço, formando o que tem sido denominado como agronegócio ou *agribusiness*. Nessa forma de produção integrada, os setores comerciais e industriais estão situados tanto a montante quanto a jusante da produção agropecuária na cadeia produtiva. Dentre as consequências socioeconômicas negativas decorrentes da situação de monopólio ou de oligopólio, comum a esses complexos, estão: aumento do êxodo rural, imposição de regras comerciais, controle dos preços das mercadorias, aumento do desemprego/pobreza no campo, imposição de padrões de produção nocivos ao meio

ambiente, imposição por parte das empresas de padrões técnicos de produção, eliminação das pequenas empresas e dos pequenos produtores rurais.

3. Conforme o texto apresentado na questão, os pontos se multiplicam através da composição de rotações. A questão, ao solicitar uma composição de rotação dos pontos  $P(-3, 4)$  e  $Q(2, -3)$ , exige que se efetue a operação simples de multiplicação dos números complexos. Dados os pontos  $P(-3, 4)$  e  $Q(2, -3)$  do plano Argand-Gauss representados, respectivamente, pelos números complexos  $z = -3 + 4i$  e  $w = 2 - 3i$ , a solução é encontrada através da multiplicação dos dois números complexos:

$$\begin{aligned} (-3 + 4i) \times (2 - 3i) &= \\ (-3) \times 2 + (-3) \times (-3i) + (4i) \times 2 + (4i) \times (-3i) &= \\ -6 + 9i + 8i - 12i^2 &= \\ -6 + 17i - 12 \times (-1) &= \\ -6 + 17i + 12 &= \\ 6 + 17i \end{aligned}$$

4.

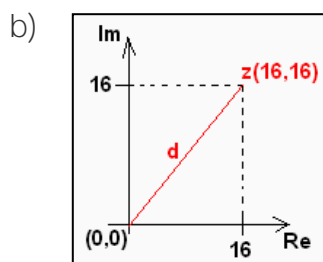
$$\begin{cases} (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i \\ (1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i \end{cases} \Rightarrow (1+i)^6 + (1-i)^6 = [(1+i)^2]^3 + [(1-i)^2]^3 =$$

$$= [2i]^3 + [-2i]^3 = (2)^3 \cdot (i)^3 + (-2)^3 \cdot (i)^3 = (8) \cdot (-i) + (-8) \cdot (-i) = -8i + 8i = 0$$

5. a) A distância “d” será do ponto  $(x_1, y_1)$  até  $(0,0)$ . Temos:

$$(1+i)^9 = (1+i)^8 \cdot (1+i) = [(1+i)^2]^4 \cdot (1+i) = [2i]^4 \cdot (1+i) = 16 \cdot (1+i) = 16 + 16i$$

$$\text{Logo, } (x_1, y_1) = (16, 16)$$



A distância é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 16 e 16. Logo,

$$d = \sqrt{16^2 + 16^2} = \sqrt{2 \cdot (16)^2} = 16\sqrt{2}$$