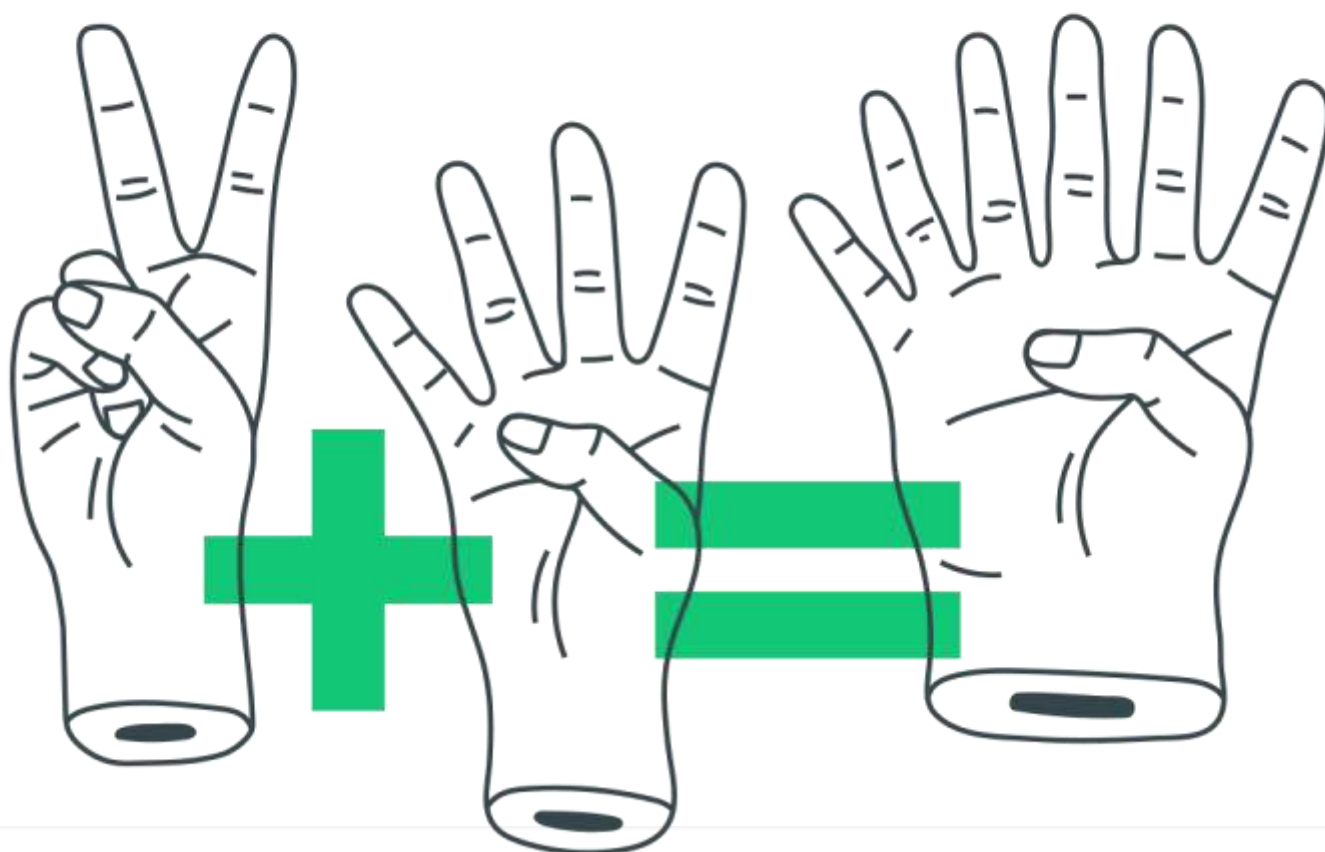


Combinatória: Tópicos Especiais II



Combinatória: Tópicos Especiais II

1. Em um certo orfanato se encontram 6 crianças. Após um dia de festividades, algumas pessoas se sensibilizaram e escreveram cartas para cada uma das 6 crianças, porém, esqueceram-se de escrever para quem era cada carta. Ao receber as 6 cartas, o orfanato resolveu então entrega-las de forma aleatória (não necessariamente cada criança receberá uma carta). Sabendo disso, qual a probabilidade de pelo menos uma carta chegar a criança certa?

2. Quantos são os anagramas da palavra "ESCOLA" nos quais nenhuma letra ocupa o seu lugar primitivo?

3. Para que se tenha um dos termos do desenvolvimento de $(x + a)^{11}$ igual a $1386x^5$, qual deve ser o valor de a ?

4. No desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{a}{x}\right)^6$, o coeficiente do termo em x^4 é 12. Qual o valor de a ?

5. Qual é o termo independente de x no desenvolvimento do binômio de Newton $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$?

Gabarito

1. Usaremos o conceito de permutação caótica dada por:

$$D_n = n! \cdot [1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - \dots + (-1)^n/n!]$$

Calcularemos a probabilidade de nenhuma carta chegar ao endereço certo e tiraremos esse resultado de 1, pois se não acontecer de nenhuma carta chegar ao endereço certo, pelo menos uma delas chegará.

Para calcular de quantas maneiras as cartas não chegam no endereço certo, temos que calcular as permutações caóticas de 6 elementos:

$$D_6 = 6! \cdot (1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + 1/6!)$$

$$D_6 = 6! \cdot (1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/5! + 1/6!)$$

$$D_6 = 6! \cdot (9/24 - 1/5! + 1/6!)$$

$$D_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4! \cdot 9/4! - 6 \cdot 5!/5! + 6!/6!$$

$$D_6 = 6 \cdot 5 \cdot 9 - 6 + 1$$

$$D_6 = 265$$

A probabilidade de que uma dessas permutações caóticas aconteça é esse valor dividido pelo total de permutações possíveis, que é dado por:

$$P_6 = 6! = 720$$

Então a probabilidade de nenhuma carta chegar a seu destino correto é:

$$P = 265/720$$

$$P = 53/144$$

$$P \approx 0,3681$$

Assim, teremos:

$$P \approx 1 - 0,3681$$

$$P \approx 0,6319$$

$$P \approx 63,19\%$$

2. Para as letras não ocuparem o seu lugar primitivo, temos que ter uma permutação caótica.

Fórmula Caótica.

$$D_n = n! \cdot [1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - \dots + (-1)^n \cdot 1/n!]$$

$$D_6 = 6! \cdot [1 - 1 + 1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/120 + 1/720]$$

$$D_6 = 265$$

- 3.

$$T_{k+1} = \left(\frac{11}{k}\right) x^{11-k} a^k = 1386x^5$$

$$11 - k = 5$$

$$k = 6$$

$$T_{6+1} = \left(\frac{11}{6}\right) x^{11-6} a^6 = 1386x^5$$

$$T_7 = \left(\frac{11}{6}\right) x^5 a^6 = 1386x^5$$

$$T_7 = \frac{11!}{6! 5!} a^6 = 1386$$

$$T_7 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! 5!} a^6 = 1386$$

$$T_7 = \frac{55440}{120} a^6 = 1386$$

$$462a^6 = 1386$$

$$a^6 = \frac{1386}{462}$$

$$a^6 = 3$$

$$a = \sqrt[6]{3}$$

4.

$$T_{k+1} = \left(\frac{6}{k}\right) x^{6-k} \left(\frac{a}{x}\right)^k$$

$$= \left(\frac{6}{k}\right) x^{6-k} a^k x^{-k}$$

$$= \left(\frac{6}{k}\right) x^{6-2k} a^k$$

$$6 - 2k = 4$$

$$-2k = 4 - 6$$

$$2k = 2$$

$$k = 1$$

$$T_{1+1} = \left(\frac{6}{1}\right) x^{6-1} \left(\frac{a}{x}\right)^1$$

$$= \frac{6!}{1! 5!} x^5 * \frac{a}{x}$$

$$= \frac{6 * 5!}{1! 5!} x^5 * \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{6x^5 a}{x} \Rightarrow 6x^4 a$$

$$6a = 12$$

$$a = 2$$

5.

$$T_{k+1} = \left(\frac{6}{k}\right) x^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right) k$$

$$= \left(\frac{6}{k}\right) x^{6-k} x^{-k}$$

$$= \left(\frac{6}{k}\right) x^{6-2k}$$

$$6 - 2k = 0$$

$$2k = 6$$

$$k = 3$$

$$T_{3+1} = \left(\frac{6}{3}\right) x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$T_4 = \frac{6!}{3! 3!} x^3 * \frac{1}{x^3}$$

$$T_4 = \frac{6 * 5 * 4 * 3!}{3! 3!}$$

$$T_4 = \frac{6 * 5 * 4}{3 * 2 * 1} = \frac{120}{6} = 20$$